

GEOMETRISCHE KOMBINATORIK UND EHRHART THEORIE

MAIN MATH CHALLENGE 2026

Im Rahmen der Vorlesung zur Creative Challenge haben wir die folgenden beiden Aussagen bewiesen:

Satz. Für jedes konvexe Gitterpolygon $P \subset \mathbb{R}^2$ gibt es Konstanten $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P \in \mathbb{Q}$, die nur von P abhängen, so dass für alle ganzzahligen $m > 0$ gilt

$$E_P(m) := |m \cdot P \cap \mathbb{Z}^2| = \alpha_P m^2 + \beta_P m + \gamma_P \quad (\text{Satz 2})$$

und

$$E_P(-m) = \alpha_P(-m)^2 + \beta_P(-m) + \gamma_P = E_{P^\circ}(m), \quad (\text{Satz 3})$$

wobei P° das Innere von P ist.

In der Creative Challenge werden Sie sich mit den Koeffizienten selbst beschäftigen.

Aufgabe 1. Beweisen Sie: $2 \cdot \beta_P$ ist die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von P .

Hinweis: Die Punkte im Rand von P sind genau die Punkte in P , die nicht in P° liegen.

Aufgabe 2. Beweisen Sie: α_P ist gleich dem Flächeninhalt von P .

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall eines Gitterdreiecks, dessen einzige Gitterpunkte seine Ecken sind. Solche Gitterdreiecke heißen *unimodular* und haben Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Überlegen Sie sich anschließend, dass es für jedes Gitterpolygon eine Triangulierung gibt, in der alle Dreiecke unimodular sind.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Für jedes konvexe Gitterpolygon P gilt $\gamma_P = 1$.

Achtung! Es ist verlockend zu argumentieren, dass $0 \cdot P = \{(0, 0)\}$ und daher $E_P(0) = 1$ gilt. Das ist nur kein Beweis, da $E_P(m)$ erstmal nur für $m > 0$ mit einem Polynom übereinstimmt. Als Gegenbeispiel seien $p, q \in \mathbb{Z}^2$ zwei verschiedene Gitterpunkte. Für $K = \{p, q\}$ ist $E_K(m) = 2$ für alle ganzzahligen $m > 0$. Damit stimmt $E_K(m)$ mit einem konstanten Polynom für alle $m > 0$ überein. Allerdings ist $0 \cdot K = \{(0, 0)\}$ und somit $|0 \cdot K \cap \mathbb{Z}^2| = 1$.