CREATIVE CHALLENGE AUFGABE:
DIE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG FÜR n-ECKE

MAIN MATH CHALLENGE, 27. SEPTEMBER 2025

GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT

Sei $n \geq 3$. Ein n-Eck heißt *regelmäßig*, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle seine Innenwinkel gleich groß sind.

In der Creative Challenge wollen wir folgende Aussage zeigen:

Unter allen ebenen n-Ecken gleichen Umfangs hat das regelmäßige n-Eck den größten Flächeninhalt.

Sei μ_n ein optimales n-Eck, d.h. es gelte (in der Notation des Vorlesungsskripts)

$$\frac{A(\gamma_n)}{L(\gamma_n)^2} \leq \frac{A(\mu_n)}{L(\mu_n)^2}$$

für alle n-Ecke γ_n. (Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass ein solches optimales n-Eck existiert.)

Beweisen Sie (d.h. begründen Sie möglichst stichhaltig und mathematisch präzise unter Verwendung der Begriffe, Aussagen und Beweismethoden aus dem Skript):

(a) Alle Innenwinkel von μ_n sind kleiner als $180°$.

(b) Alle Seiten von μ_n sind gleich lang.

(c) μ_n ist regelmäßig.
Hinweis: Sei ν_n ein regelmäßiges n-Eck. Ergänzen Sie sowohl μ_n als auch ν_n durch geeignete Kreisbögen und vergleichen Sie die entstehenden Flächen. Beachten Sie dabei Satz 2 des Skripts sowie das Resultat aus Aufgabenteil (b).

(d) Der Quotient $\frac{A(\mu_n)}{L(\mu_n)^2}$ ist eine streng monoton steigende Funktion von n.
Hinweis: Schneiden Sie von einer Ecke des optimalen n-Eck μ_n ein gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlänge ε ab, um ein $(n+1)$-Eck $\gamma_{n+1}(\varepsilon)$ zu erhalten. Betrachten Sie die Funktion $f(\varepsilon) := \frac{A(\gamma_{n+1}(\varepsilon))}{L(\gamma_{n+1}(\varepsilon))^2}$ und zeigen Sie, dass $f'(0) > 0$.