

Main Math Challenge 2023  
Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Institut für Mathematik



## TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

### Aufgabe 1.

Von 61 äußerlich identischen Kugeln sei Folgendes bekannt: 60 Kugeln sind genau gleich schwer, und eine Kugel ist entweder schwerer oder leichter als die übrigen. Durch höchstens dreimaliges Wägen mit einer Balkenwaage soll festgestellt werden, ob die abweichende Kugel leichter oder schwerer ist. (Sie müssen nicht herausfinden, welche Kugel genau die abweichende ist.)  
Wie ist vorzugehen? Begründen Sie, warum Ihr Vorschlag in jedem möglichen Fall die richtige Antwort liefert.

---

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben.

Main Math Challenge 2023  
Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Institut für Mathematik



## TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

### Aufgabe 2.

Bei einem Glücksspiel beträgt der Einsatz 2€. Es werden zwei faire, sechseitiger Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6 geworfen. Bei gleicher Augenzahl erhält der Spieler 5€. Andernfalls wird die kleinere Augenzahl von der größeren abgezogen. Ist die Differenz der Augenzahlen 5, werden 10€ ausgezahlt. Bei einer Augendifferenz von 1 erhält man den Einsatz zurück. Bei allen anderen Ergebnissen erhält der Spieler nichts zurück.

- Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn bzw. Verlust?
- Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair, d.h. der durchschnittliche Gewinn 0€?

---

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.

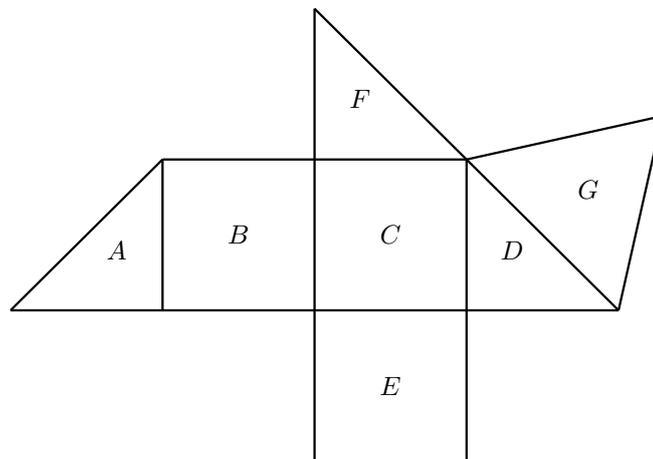


## TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

### Aufgabe 3.

In der Abbildung sind  $B, C, E$  Einheitsquadrate,  $A, D, F$  gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke und  $G$  ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur kann entlang der Kanten zu einem Polyeder gefaltet werden. Berechnen Sie das Volumen dieses Polyeders.



---

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.



## TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

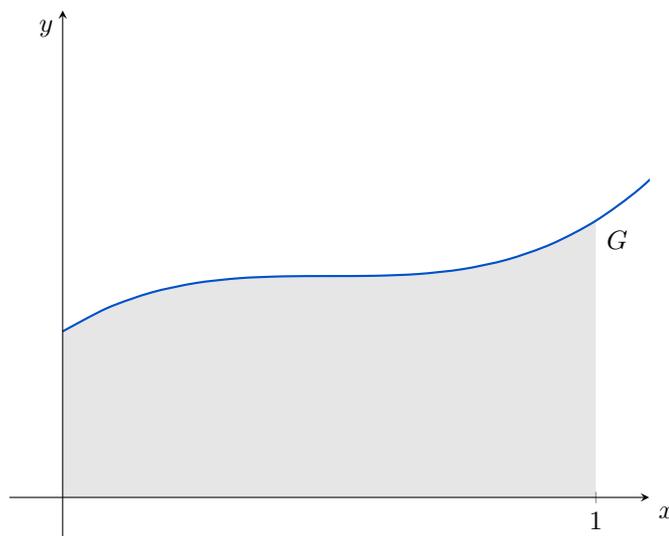
### Aufgabe 4.

Es sei  $F$  eine Funktion gegeben durch  $F(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$ .

- a) Zeigen Sie  $F(x) + F(1-x) = 1$  für  $x$  eine beliebige reelle Zahl.  
b) Berechnen Sie

$$F\left(\frac{1}{2023}\right) + F\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + F\left(\frac{2022}{2023}\right).$$

- c) Sei nun  $G$  eine beliebige nichtnegative stetige Funktion mit  $G(x) + G(1-x) = 1$ . Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von  $G$  mit der  $x$ -Achse zwischen  $0 \leq x \leq 1$  einschließt.



---

Für die Team Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Bearbeiten Sie in dieser Zeit möglichst alle Aufgaben. Geben Sie Ihren Lösungsweg mit an. Pro Aufgabe können Sie bis zu 10 Punkte erreichen.