

TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 1.

Von 61 äußerlich identischen Kugeln sei Folgendes bekannt: 60 Kugeln sind genau gleich schwer, und eine Kugel ist entweder schwerer oder leichter als die übrigen. Durch höchstens dreimaliges Wägen mit einer Balkenwaage soll festgestellt werden, ob die abweichende Kugel leichter oder schwerer ist. (Sie müssen nicht herausfinden, welche Kugel genau die abweichende ist.) Wie ist vorzugehen? Begründen Sie, warum Ihr Vorschlag in jedem möglichen Fall die richtige

Wie ist vorzugehen? Begründen Sie, warum Ihr Vorschlag in jedem möglichen Fall die richtige Antwort liefert.

Lösung:

Punkteverteilung: "Geschickte" Aufteilung der Kugeln 3P., Begründung 7P.

Variante mit dreimaligem Wägen: Wir bilden drei Gruppen $A,\,B,\,C$ zu jeweils 20 Kugeln. Eine Kugel legen wir beiseite.

Vergleiche A und B (erstes Mal wägen).

Fall 1: Ist A > B, d.h. A schwerer als B. Dann vergleichen wir A und C (zweites Mal wägen). Ist A = C, so ist in B die leichtere Kugel. Ist A > C, so ist in A die schwerere Kugel. Der Fall A < C kann jedoch nicht eintreten, denn dann wäre B < A < C – dies kann aber nicht sein, da es nur eine abweichende Kugel gibt.

Fall 2: Ist B > A so können wir wie im ersten Fall vorgehen, indem wir die Rollen von A und B vertauschen.

Fall 3: A=B. Vergleiche dann A und C (zweites Mal wägen). Wiederum gilt: Ist A>C, dann ist in C die leichtere Kugel und ist A< C, dann ist in C die schwerere Kugel. Ist auch A=C, dann ist die abweichende Kugel genau die herausgelegte Kugel. Wir vergleichen also ein drittes Mal irgendeine Kugel aus A (oder B oder C) mit der herausgelegten Kugel und erhalten, ob diese schwerer oder leichter ist.

Variante mit zweimaligem Wägen: Wir bilden zwei Gruppen A und B zu je 30 Kugeln und legen

die letzte Kugel beiseite.

Vergleiche nun A und B (erstes Wägen).

Fall 1: Ist A=B, dann ist die beseite gelegte Kugel abweichend und wir vergleichen Sie einfach mit einer der Kugeln aus A oder B (zweites Mal wägen). Fall 2: Ist A < B, dann ist die abweichende Kugel in A oder B enthalten. Wir teilen nun A in zwei Gruppen A_1 und A_2 zu je 15 Kugeln ein und vergleichen diese beiden (zweites Mal wägen). Ist $A_1 = A_2$, so ist in B die schwerere Kugel. Ist $A_1 < A_2$ oder $A_2 < A_1$, so muss in A die abweichende Kugel enthalten sein und diese ist somit leichter

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben.



TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 2.

Bei einem Glücksspiel beträgt der Einsatz $2 \in$. Es werden zwei faire, sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6 geworfen. Bei gleicher Augenzahl erhält der Spieler $5 \in$. Andernfalls wird die kleinere Augenzahl von der größeren abgezogen. Ist die Differenz der Augenzahlen 5, werden $10 \in$ ausgezahlt. Bei einer Augendifferenz von 1 erhält man den Einsatz zuück. Bei allen anderen Ergebnissen erhält der Spieler nichts zurück.

- a) Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn bzw. Verlust?
- b) Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair, d.h. der durchschnittliche Gewinn $0 \in ?$

Lösung:

Punkteverteilung: a) und b) je 5P.

Zu a) In 6 von 36 Fällen stimmen die Augenzahlen überein und es werden $5 \in$ ausgezahlt. In 10 Fällen beträgt die Differenz 1 und es wird der Einsatz $(2 \in)$ zurückgezahlt, und in zwei Fällen beträgt die Differenz 5, was zu einem Auszahlungsbetrag von $10 \in$ führt. In allen anderen Fällen gibt es nichts zurück. Das macht eine erwartete Rückzahlung von

$$\frac{1}{36} \left(6 \cdot 5 \in +10 \cdot 2 \in +2 \cdot 10 \in \right) = \frac{70}{36} \in =2 \in -\frac{1}{18} \in,$$

also ist der durchschnittliche Verlust $\frac{1}{18} \in$.

Zu b) Hier muss man berücksichtigen, dass im Fall der Augendifferenz 1 <u>der Einsatz</u> zurückgezahlt wird, und Fairness im Einsatz $x \in$ also gewährleistet ist, wenn

$$36x = 6 \cdot 5 + 10 \cdot x + 2 \cdot 10,$$

also für

$$x = \frac{50}{26} = \frac{25}{13}$$

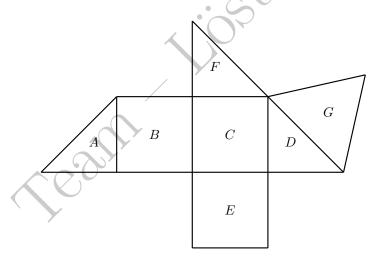


TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 3.

In der Abbildung sind B, C, E Einheitsquadrate, A, D, F gleichschenklige rechtwinklinge Dreiecke und G ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur kann entlang der Kanten zu einem Polyeder gefaltet werden. Berechnen Sie das Volumen dieses Polyeders.



Lösung:

Punkteverteilung: 3P. für das Erkennen der richtigen Figur, 7P. für die Rechnung

Das Volumen des Polyeders beträgt $\frac{5}{6}$.

Zur Begründung: Das Polyeder erhält man, indem man vor einem Einheitswürfel ein Tetraeder wegnimmt, das eine Ecke und ihre drei Nachbarecken als Ecken hat. Dieses Tetraeder hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ und Kanten von Länge 1 zur Spitze.

Es genügt also zu zeigen, dass das Tetraeder ein Volumen V von $\frac{1}{6}$ besitzt. Das Volumen eines Tetraeders ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{3} \cdot (Grundfläche mal Höhe).$$

Option 1 (am einfachsten): Verwenden wir als Grundfläche die Hälfte eines der halben Einheitsquadrate, dann ist dessen Höhe genau die Kante des alten Würfels. Wir erhalten also

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Option 2 (etwas komplizierter zu berechnen): Verwenden wir das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge l als Grundfläche, dann ergibt sich mit Pythagoras seine Höhe h als

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Wegen $l = \sqrt{2}$ hat unser gleichseitiges Dreieck also einen Flächeninhalt A von

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir müssen noch die Höhe h des Tetraeders bestimmen. Das Dreieck, das der Höhenfußpunkt Hmit einer Ecke E des gleichseitigen Dreiecks und der Spitze S bildet, ist rechtwinklig in H. Für die Länge d der Strecke zwischen E und H ergibt sich damit nach Pythagoras

$$h^2 + d^2 = 1.$$

Um d zu bestimmen, betrachten wir das Dreieck aus H, E und einer weiteren Ecke E' im gleichseitigen Dreieck. In Ehat dieses Dreieck den Winkel $30^{\circ}.$ Damit finden wir

 $2d\cos 30^\circ = \sqrt{2} = \text{Länge der Strecke von E nach E'}.$

Wegen $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ liefert das $d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$ Schließlich erhalten wir $h=\sqrt{1-d^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ Das Volumen des Tetraeders ist also $\frac{1}{3}\cdot A\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}.$

$$h = \sqrt{1 - d^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$$



TEAM CHALLENGE

TEAMNAME:

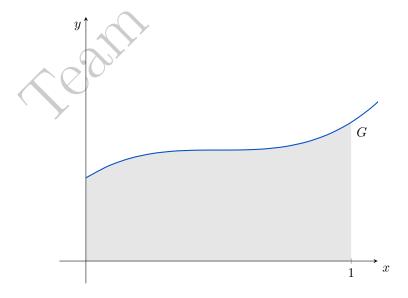
Aufgabe 4.

Es sei Feine Funktion gegeben durch $F(x)=\frac{9^x}{9^x+3}.$

- a) Zeigen Sie F(x) + F(1-x) = 1 für x eine beliebige reelle Zahl.
- b) Berechnen Sie

$$F\left(\frac{1}{2023}\right) + F\left(\frac{2}{2023}\right) + \ldots + F\left(\frac{2022}{2023}\right).$$

c) Sei nun G eine beliebige nichtnegative stetige Funktion mit G(x) + G(1-x) = 1. Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von G mit der x-Achse zwischen $0 \le x \le 1$ einschließt.



Lösung:

Punkteverteilung: a) und b) je 3P., c) 4P.

Zu a) Wir berechnen direkt

$$F(x) + F(1-x) = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{9^x(9^{1-x} + 3) + 9^{1-x}(9^x + 3)}{(9^x + 3)(9^{1-x} + 3)}$$
$$= \frac{9 + 3 \cdot 9^x + 9 + 3 \cdot 9^{1-x}}{9 + 3 \cdot 9^{1-x} + 3 \cdot 9^x + 9} = 1.$$

Zu b) Für jedes $n=1,\ldots,2022$ gilt wegen a), dass $F(\frac{n}{2023})+F(\frac{2023-n}{2023})=1$. Es lassen sich nun alle Summanden in der langen Summe in Paare zusammenfassen, deren Summe jeweils 1 ist: der erste mit dem letzten, der zweite mit dem vorletzten usw. Da die Anzahl der Summanden gerade ist, bleibt am Ende keiner übrig und es ergibt sich als Wert der Summe genau die Anzahl der Paare, also 1011.

Zu c) Betrachte eine neue Funktion \tilde{G} , welche gegeben ist durch $\tilde{G}(x) = G(x) + G(1-x) = 1$ für $0 \le x \le 1$. Offensichtlich ist dann die Fläche, die der Graph von \tilde{G} mit der x-Achse zwischen $0 \le x \le 1$ einschließt gegeben durch 1. Nun hat aber die Fläche, die der Graph von G(1-x) mit der x-Achse einschließt, genau den gleichen Flächeninhalt hat wie die gesuchte Fläche: man spiegelt nämlich einfach diese Fläche an der senkrechten Geraden durch $x = \frac{1}{2}$. Also muss die gesuchte Fläche den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ haben.