

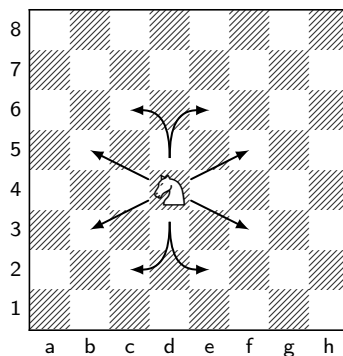
Aufgabe zur Creative Challenge Springer-Irrfahrt auf dem Schachbrett

Goethe-Universität Frankfurt

Main Math Challenge, 7. Oktober 2023



Ein Schachbrett besteht aus 8×8 Feldern. Ein Springer darf beim Schachspiel bekanntlich folgende Züge machen:



Aufgabe: Ein Springer startet unten links im Feld a1 und wählt in jedem Zug rein zufällig eines der Felder aus, die er von seinem aktuellen Standort in einem Springerzug erreichen kann. Jedes aktuell erreichbare Feld wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Es stehen keine weiteren Figuren auf dem Schachbrett. Wie viele Sprünge macht der Springer im Durchschnitt, bis er auf diese Weise seinen Startpunkt zum ersten Mal wieder erreicht hat?

Bei der Präsentation der Lösung soll auch auf eine formale mathematische Herleitung und eine präzise Verwendung der im Video und dem Skript eingeführten Begriffe und Resultate geachtet werden.

Lösung: Wir fassen das Schachbrett mit den möglichen Springerzügen als Graph auf: Die Felder sind die Knoten, und die Kanten sind durch die möglichen Züge zwischen zwei Feldern bzw. zwei Knoten gegeben. Wir nummerieren die Felder ausgehend von Feld $a1$ durch mit $1, \dots, 64$.

Somit handelt es sich hier um eine (einfache symmetrische) Irrfahrt eines Springers auf diesem Graphen, mit Start im Feld $1 = a1$. Gesucht ist die erwartete (durchschnittliche) erste Rückkehrzeit zum Startpunkt. Nach Satz 2 im Video bzw. im Skript ist diese gegeben durch

$$\mathbb{E}_1[T_1] = \frac{1}{\pi_1}$$

wobei π_1 das Gewicht des Knotens 1 ($= a1$) ist. Dieser Satz darf angewandt werden, weil die Voraussetzungen aus dem Skript erfüllt sind, insbesondere ist der Graph zusammenhängend, weil der Springer jedes Feld des Schachbretts erreichen kann (um das einzusehen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Beispielsweise kann man sehen, dass man von jedem Feld aus in drei Zügen ein direkt benachbartes Feld erreichen kann, und daraus kann man folgern, dass man sukzessive das ganze Schachbrett ablaufen kann). Laut Definition ist $\pi_1 = \frac{d_1}{d_1 + \dots + d_{64}}$, mit d_i dem Grad (=Anzahl Kanten) von Knoten $i = 1, \dots, 64$, also ist die gesuchte Größe

$$\mathbb{E}_1[T_1] = \frac{1}{\pi_1} = \frac{d_1 + \dots + d_{64}}{d_1}.$$

Nun müssen also nur noch die d_i bestimmen. Von der Ecke $a1$ aus kann der Springer zwei mögliche Sprünge machen, also ist $d_1 = 2$. Die anderen d_i bestimmen wir durch Zählen:

- $d_i = 2$ für alle Ecken, davon gibt es 4 Stück
- $d_i = 3$ für die Felder direkt links/rechts/über/unter einer Ecke, davon gibt es 8 Stück (Feld $a2, a7, b1, b8, g1, g8, h2, h7$)
- $d_i = 4$ für insgesamt 20 Felder, nämlich $a3-a6, h3-h6, b2, b7, g2, g7, c1, c8, d1, d8, e1, e8, f1, f8$
- $d_i = 6$ für insgesamt 16 Felder, nämlich $b3-b7, g3-g7, c2, c7, d2, d7, e2, e7, f2, f7$.
- $d_i = 8$ für insgesamt 16 Felder, nämlich das Quadrat mit den Ecken $c3, c6, f3, f6$ in der Mitte des Schachbretts.

Die Summe der Grade ist also

$$d_1 + \dots + d_{64} = 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 8 + 24 + 80 + 96 + 128 = 336.$$

Somit ist die erwartete erste Rückkehrzeit gleich

$$\mathbb{E}_1[T_1] = \frac{1}{\pi_1} = \frac{d_1 + \dots + d_{64}}{d_1} = \frac{336}{2} = 168.$$