ENDLICHE PROJEKTIVE EBENEN

MAIN MATH CHALLENGE 2022

RAMAN SANYAL

Bei diesem Dokument handelt es sich um die Begleitnotizen zu der *Creative Challenge* Vorlesung der *Main Math Challenge 2022*. Die Notizen geben formale und vollständige Beweise der Aussagen im Vorlesungsvideo. Es finden sich auch drei Übungsaufgaben in den Notizen, die für die Vorbereitung auf der Creative Challenge hilfreich sind.

Die Menge der uns zur verfügungstehenden **Punkte** bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$. Eine **Gerade** L ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}$. Eine Menge $\mathcal{L}$ von **Geraden** ist somit eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$. Wir sagen, dass ein Punkt $p \in \mathcal{P}$ auf einer Geraden $L \in \mathcal{L}$ **liegt**, wenn $p \in L$ gilt.

Definition 1 (Endliche projektive Ebene)**.** Eine **endliche projektive Ebene** ist ein Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, wobei $\mathcal{P}$ eine endliche Menge ist und $\mathcal{L}$ eine endliche Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$ ist, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(P1) Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ liegen auf genau einer Geraden $L \in \mathcal{L}$,
(P2) Je zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$ haben genau einen gemeinsamen Punkt,
(P3) Es gibt vier Punkte $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ so dass auf jeder Geraden maximal zwei der vier Punkte liegen.

Die Eigenschaft (P1) klingt einleuchtend und bedarf keiner Erklärung.

Eigenschaft (P2) haben wir in der Vorlesung gerechtfertigt. Die Vorstellung dabei ist, dass sich parallele Geraden im Unendlichen in einem Punkt schneiden. Dann schneiden sich je zwei Geraden in der Ebene.

Eigenschaft (P3) soll extrem langweilige Fälle ausschließen. Ohne (P3) könnten wir $\mathcal{P}$ als leere Menge nehmen. Oder auch könnte $\mathcal{L}$ nur aus einer einzelnen Gerade bestehen.

Dass es überhaupt endliche projektive Ebenen gibt, ist Inhalt der ersten Übungsaufgabe.

Übungsaufgabe 1. Betrachte $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ zusammen mit den Geraden $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_3, p_4, p_7\}, \{p_1, p_6, p_7\}, \{p_2, p_4, p_6\}, \{p_2, p_5, p_7\}, \{p_3, p_5, p_6\}, \{p_1, p_5, p_4\}\}$$

Eine schematische (keine geometrische!) Darstellung ist in Abbildung **??** Überprüfe, dass $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene ist.

Date: 20. September 2022.

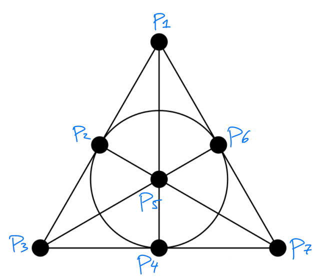

ABBILDUNG 1. Schematische Visualisierung einer endlichen proj. Ebene.

Die Eigenschaften (P1), (P2), (P3) können wir nutzen um tiefere Einsichten und Gesetzmäßigkeiten endlicher projektiver Ebenen zu entdecken. Dabei müssen diese allgemeingültigen Einsichten sich Hieb- und Stichfest aus den drei Eigenschaften ableiten lassen. Wir sprechen bei einer lückenlosen Argumentation einer Eigenschaft von einem Beweis.

Proposition 1. *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(E1) *Für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ gibt es einen Punkt $p \in \mathcal{P}$, der nicht auf L liegt.*
(E2) *Zu jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ gibt es eine Gerade $L \in \mathcal{L}$, die p nicht enthält.*
(E3) *Für je zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$ gibt es einen Punkt $p \in \mathcal{P}$, der weder auf L noch auf L' liegt.*

Beweis. (E1): Sei $L \in \mathcal{L}$ eine beliebige Gerade. Nach (P3) enthält L nur maximal zwei der vier Punkte a, b, c, d. Damit gibt es einen Punkt, der nicht auf L liegt.

(E2): Sei $p \in \mathcal{P}$ ein beliebiger Punkt und a, b, c, d die Punkte aus (P3). Wenn p einer der vier Punkte ist (z.B. $p = a$), dann sei $L \in \mathcal{L}$ die Gerade die durch zwei der anderen Punkte (z.B. durch b und c) geht. Die Existenz von L folgt aus (P1). Wenn $p \in L$, dann enthält L drei der Punkte und widerspricht (P3).

Wenn p nicht einer der vier Punkte ist, dann betrachte die Gerade L durch a und b und die Gerade L' durch a und c. Wir behaupten, dass entweder L oder L' den Punkt p nicht enthält. Ansonsten würden beide Geraden die Punkte p und a enthalten und nach der Eindeutigkeit (P1) würde folgen $L = L'$. Damit würde L aber dann a, b, c enthalten, was im Widerspruch zu (P3) steht. Damit kann p nicht auf beiden Geraden enthalten sein.

(E3): Seien $L, L' \in \mathcal{L}$ zwei verschiedene Geraden. Wenn einer der Punkte aus (P3) weder auf L noch auf L' liegt, dann sind wir fertig. Andernfalls liegt jeder der Punkte a, b, c, d auf L oder L' oder auf beiden. Aus (P3) folgt, dass dann L und L' jeweils zwei der vier Punkte enthalten. Nach umbenennen der Punkte können wir davon ausgehen, dass $a, b \in L$ und $c, d \in L'$. Wir konstruieren die Gerade H durch die Punkte a und c und H' durch die Punkte b und d. Sei p der Schnittpunkt von H und H', den es nach (P2) geben muss. Wir behaupten, dass p der gesuchte Punkt ist. Falls nämlich $p \in L$ gilt, dann folgt aus $a, p \in L$ und $a, p \in H$, dass $L = H$ und damit enthält L die Punkte a, b, c im Widerspruch zu (P3). Gleiches gilt wenn $p \in L'$. Dann sind L' und H' Geraden auf denen p und d liegen und somit $L' = H'$. Da $c \in L'$ und $b \in H' = L'$ folgt, dass b, c, d auf L' liegen. Auch ein Widerspruch zu (P3). □

Übungsaufgabe 2. Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene und $p, p' \in \mathcal{P}$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es eine Gerade $L \in \mathcal{L}$, die weder p noch p' enthält.

Wir können diese ersten Einsichten nutzen um tiefere und unerwartete Einsichten zu gewinnen:

Proposition 2. *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene. Dann gilt:*

(T) *Je zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$ enthalten die gleiche Anzahl von Punkten.*

Beweis. Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist. Dann gibt es zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$ die als Gegenbeispiel zur Aussage dienen, also dass L mehr Punkte enthält als L'. Nehmen wir an, dass $p_1, \dots, p_k$ genau die Punkte auf L sind.

Sei p der Punkt, der weder auf L noch auf L' liegt. Die Existenz dieses Punkts haben wir in (E3) bewiesen. Für jeden Punkt p_i sei L_i die eindeutige Gerade, die durch p und p_i geht. Wir bemerken, dass alle diese Geraden verschieden sind. Sollte $L_i = L_j$ sein, dann gilt $p_i, p_j \in L_i$ und nach (P1) gilt $L = L_i$. Das ist aber im Widerspruch zur Annahme, dass p nicht auf L liegt.

Nach (P2) trifft jede Gerade L_i die Gerade L' in einem Punkt, den wir mit p'_i bezeichnen wollen. Wir haben also Punkte $p'_1, p'_2, \dots, p'_k$ konstruiert, zu jeder Geraden L_i einen. Da L' aber weniger als k Punkte enthält, müssen zwei der Punkte gleich sein. Wenn aber $p'_i = p'_j$ gilt, dann gehen die Geraden L_i und L_j beide durch die Punkte p und p'_i und sind somit gleich. Das hatten wir aber bereits ausgeschlossen. Damit sind alle Punkte $p'_1, \ldots, p'_k$ verschieden und L' hat damit mindestens so viele Punkte wie L. Das Paar L, L' kann also kein Gegenbeispiel sein. $\square$

Übungsaufgabe 3. Finde ein Argument um zu zeigen, dass in einer endlichen projektiven Ebene jeder Punkt auf der gleichen Anzahl Geraden liegt.

Die Einsicht (T) motiviert die folgende Definition:

Definition 2. Die endliche projektive Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ hat die **Ordnung** n, wenn auf einer (und somit jeder) Geraden $L \in \mathcal{L}$ genau $n + 1$ Punkte liegen.

Die endliche projektive Ebene aus Übungsaufgabe **??** hat also Ordnung 2.

Die folgende Aussage besagt, dass die Ordnung auch die Anzahl Geraden durch einen Punkt bestimmt.

Proposition 3. *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n. Dann gilt:*

(S1) *Jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ liegt auf genau $n + 1$ Geraden.*

Beweis. Sei $p \in \mathcal{P}$ ein beliebiger Punkt. Sei L die Gerade aus (E1), die p nicht enthält. Seien $p_1, \ldots, p_{n+1}$ die Punkte auf L. Für jedes $i = 1, 2, \ldots, n+1$ konstruieren wir die Gerade L_i durch p und p_i. Wie zuvor können wir argumentieren, dass das $n+1$ verschiedene Geraden sind: Wenn $L_i = L_j$, dann liegen p_i und p_j auf L_i und somit ist $L_i = L$ nach (P1). Aber nach Konstruktion liegt p auf L_i aber nicht auf L.

Wir behaupten, dass $L_1, \ldots, L_{n+1}$ alle Geraden durch p sind. Ist $L' \in \mathcal{L}$ eine weitere Gerade durch p, dann trifft nach (P2) L' die Gerade L in einem der Punkte p_k. Nach (P1) folgt dann aber, dass $L' = L_k$ ist. $\square$

Wir kommen damit zur strukturellen Hauptaussage, dass die Ordnung die Anzahl der Punkte bestimmt.

Satz 1. *Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung n. Dann gilt:*

(S2) *Es gibt genau $n^2 + n + 1$ viele Punkte.*

Beweis. Für den Beweis müssen wir alles nutzen was wir bisher verstanden haben.

Sei $p \in \mathcal{P}$ ein beliebiger aber fest gewählter Punkt. Nach (S1) liegt p auf genau $n + 1$ verschiedenen Geraden $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$.

Wir behaupten, dass jeder Punkt aus $\mathcal{P}$ auf einer dieser Geraden liegt. Sei $q \in \mathcal{P}$ ein von p verschiedener Punkt. Sei L' die Gerade durch p und q. Dann muss L' eine der Geraden L_k sein und somit liegt $q \in L_k$.

Je zwei der Geraden $L_1, \ldots, L_{n+1}$ schneiden sich nur in dem Punkt p. Damit enthält jede Gerade zusätzlich zu p noch genau n Punkte (siehe Definition von Ordnung), die auf keiner der anderen Geraden enthalten sind. Die Anzahl aller Punkte ist damit $1 + n(n + 1) = 1 + n + n^2$. $\square$

Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt, Germany

Email address: sanyal@math.uni-frankfurt.de