4 Abbildungen

4.1 Beispiele

4.1.1 Definition

Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \ . \end{aligned}$$

X ist der *Definitionsbereich* von f, Y ist der *Zielbereich* von f, $x \mapsto f(x)$ ist die *Abbildungsvorschrift*, $f(x)$ ist das *Bild* oder der *Funktionswert* von x und x ist ein *Urbild* von $f(x)$.

„Abbildung“ ist ein wesentlicher Begriff in der modernen Mathematik. Aus der Schule werden Sie den Begriff „Funktion“ kennen. Die Begriffe Abbildung und Funktion sind synonym. Schauen wir uns einige Beispiele an:

4.1.2 Beispiele

(1) Sei X eine Menge. Dann ist die *Identität* die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : X &\to X \\ x &\mapsto x \ . \end{aligned}$$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung.

(3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mit $x \mapsto \frac{x}{2}$ ist eine Abbildung.

(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto \frac{x}{2}$ ist keine Abbildung, da z.B. für $x = 1$ der Wert $\frac{1}{2}$ nicht in Z liegt.

(5) Sei zu einem $x \in \mathbb{R}$ der Wert y so, dass $y^2 = x$. Dann ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto y$$

keine Abbildung: Erstens ist z.B. $2^2 = 4$ und $(-2)^2 = 4$. $f(4)$ ist also nicht eindeutig. Zweitens hat z.B. $f(-1)$ gar kein Urbild in $\mathbb{R}$.

(6) Sei x eine nicht-negative reelle Zahl und sei dazu y die nicht-negative Lösung der Gleichung $y^2 = x$. Dann ist

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto y$$

eine Abbildung.

(7) $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\begin{aligned} a &\mapsto 2 \\ b &\mapsto 4 \\ c &\mapsto 3 \\ d &\mapsto 3 \end{aligned}$$

ist eine Abbildung. Eine Darstellung von f ist in Abbildung 3 zu sehen.

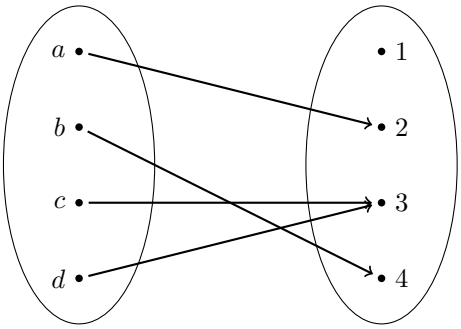


Abbildung 3: Abbildung aus Beispiel 4.1.2 (7)

4.2 Bilder und Urbilder

Wir hatten die Begriffe Bild und Urbild schon in der Definition der Abbildung kennen gelernt. Dort bezogen Sie sich auf Elemente von Definitions- und Zielbereich. Man kennt diese Begriffe aber auch für Mengen:

4.2.1 Definition

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann ist das *Bild* der Menge M

$$f(M) = \{y \in Y : \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y\} .$$

Das *Bild* oder der *Wertebereich* der Abbildung f ist $f(X)$.
Das *Urbild* der Menge N ist

$$f^{-1}(N) = \{x \in X : f(x) \in N\} .$$

4.2.2 Beispiele

(1) Betrachten wir noch einmal die Abbildung aus Beispiel 4.1.2 (Abbildung AllgemAbb-Graph): $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\begin{aligned} a &\mapsto 2 \\ b &\mapsto 4 \\ c &\mapsto 3 \\ d &\mapsto 3 \end{aligned}$$

Unter dieser Abbildung haben wir beispielsweise folgende Bilder:

$$\begin{aligned} f(\{a, b\}) &= \{2, 4\} \\ f(\{c, d\}) &= \{3\} \\ f(\{a, b, c, d\}) &= \{2, 3, 4\} \qquad \text{(Bild von } f\text{)} \end{aligned}$$

Urbilder sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1, 2\}) &= \{a\} \\ f^{-1}(\{3, 4\}) &= \{b, c, d\} \\ f^{-1}(\{1\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

4.3 Injektionen, Surjektionen und Bijektionen

4.3.1 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn für alle $n, m \in X$ gilt

$$n \neq m \;\Rightarrow\; f(n) \neq f(m)\ .$$

Anschaulich bedeutet dies, dass keine zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das gleiche Bild abgebildet werden dürfen — oder anders formuliert: ein Element des Zielbereichs darf höchstens einmal „getroffen“ werden.

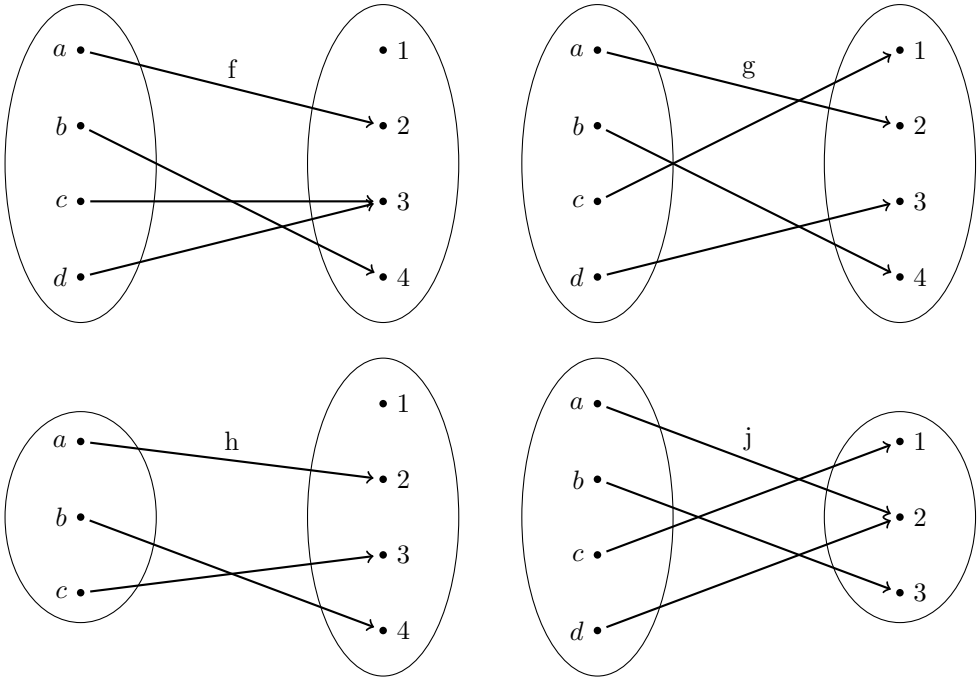


Abbildung 4: Beispiele zur Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

4.3.2 Beispiele

(1) Betrachten wir die folgenden Abbildungen (vgl. Abbildung 4):

$$f : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\} \text{ mit } a \mapsto 2\ ,\ b \mapsto 4\ ,\ c \mapsto 3\ ,\ d \mapsto 3$$
$$g : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\} \text{ mit } a \mapsto 2\ ,\ b \mapsto 4\ ,\ c \mapsto 1\ ,\ d \mapsto 3$$
$$h : \{a,b,c\} \to \{1,2,3,4\} \text{ mit } a \mapsto 2\ ,\ b \mapsto 4\ ,\ c \mapsto 3$$
$$j : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3\} \text{ mit } a \mapsto 2\ ,\ b \mapsto 3\ ,\ c \mapsto 1\ ,\ d \mapsto 2$$

f ist nicht injektiv: es ist $c \neq d$, aber $f(c) = f(d)$.

g ist injektiv, denn kein Element des Zielbereichs ist Bild von mehr als einem Element des Definitionsbereichs: $1 = f(c),\ 2 = f(a),\ 3 = f(d),\ 4 = f(b)$.

h ist auch injektiv: $2 = f(a),\ 3 = f(d),\ 4 = f(b)$. 1 ist kein Bild irgendeines Elements des Definitionsbereichs.

j ist nicht injektiv: $f(a) = f(d)$ obwohl $a \neq d$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, denn $f(-1) = f(1)$.

(3) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist injektiv.

Beweis:

Wir beweisen dies, indem wir die Kontraposition zeigen:

Sei m und n aus dem Definitionsbereich mit $f(m) = f(n)$, dann gilt $m = n$.

Seien also $m, n \geq 0$ reelle Zahlen und sei

$$\begin{aligned} & f(m) = f(n) \\ \Rightarrow \quad & m^2 = n^2 \\ \Rightarrow \quad & m^2 - n^2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (m+n)(m-n) = 0 \\ \Rightarrow \quad & m + n = 0 \ \vee \ m - n = 0 \\ \Rightarrow \quad & m = -n \ \vee \ m = n \end{aligned}$$

Ist $m > 0$, so folgt aus $m = -n$, dass $n < 0$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Folglich gilt $m = n$. □

4.3.3 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *surjektiv*, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist also genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$. Für jedes Element des Zielbereichs muss es ein Urbild geben.

4.3.4 Beispiele

(1) Betrachten wir wieder die Abbildungen aus Abbildung 4:

f und h sind nicht surjektiv, denn es gibt jeweils kein Element x mit $f(x) = 1$.

g und j sind surjektiv: alle Elemente der Zielbereiche haben (mindestens) ein Urbild.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x$ ist surjektiv:

Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$ und damit gilt

$$f(x) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y \ .$$

Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ finden wir also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv: Es gilt für alle reellen Zahlen $x^2 \geq 0$. Folglich gibt es z.B. keine reelle Zahl mit $f(x) = -1$.

4.3.5 Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Injektiv bedeutet, dass jedes Bild *höchstens* ein Urbild hat. Surjektiv bedeutet, dass jedes Element im Zielbereich *mindestens* ein Urbild hat. Bijektiv bedeutet also, dass jedes Element im Zielbereich *genau* genau ein Urbild hat.

Ist dies der Fall, kann man die Abbildung auch „umdrehen“:

4.3.6 Definition

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann ist die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : Y \to X$ gegeben durch

$$y \mapsto x \ , \text{ wobei } f(x) = y \ .$$

4.3.7 Beispiele

Betrachten wir wieder die Beispiele aus Abbildung 4:
f und h sind nicht bijektiv, da sie nicht surjektiv sind.
g ist bijektiv, da g sowohl injektiv als auch surjektiv ist, jedes Element des Zielbereichs hat genau ein Urbild.
j ist nicht bijektiv, da $j(a) = 2 = j(d)$, j also nicht injektiv ist.