3 Mengenlehre

3.1 Mengen und ihre Elemente

Wir haben Mengen und Schreibweisen wie $\in$, $\{\dots\}$ zwar bereits benutzt, wollen uns aber auch die Notationen und Begriffe der Mengenlehre genauer anschauen.

3.1.1 Definition (Cantor[8])

Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die *Elemente* von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Hiernach kann man beliebige Objekte zu Mengen zusammenfassen. Bespiele wären...

- die Studierenden in einem Hörsaal,
- alle Geraden in einer Ebene,
- die natürlichen Zahlen,
- alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1.

3.1.2 Notation

Mengen werden mittels geschweifter Klammern geschrieben: $M = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\}$.
Ist m ein Element von M, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
Mengen können durch Aufzählung aller Elemente geschrieben werden, z.B.

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \ ,$$

oder durch Angabe von Eigenschaften:

$$M = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1 \text{ und } n \leq 5\} \ .$$

3.1.3 Definition

Die Menge $\emptyset$, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge*:

$$\emptyset = \{x : x \neq x\} \ .$$

Die Elemente einer Menge besitzen keine bestimmte Reihenfolge, es gilt z.B. $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$. Auch treten die selben Elemente in einer Menge nicht mehrfach auf: $\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

3.2 Teilmengen

3.2.1 Definition

Seien M und N Mengen. N ist *Teilmenge* von M ($N \subset M$), wenn für alle $n \in N$ gilt $n \in M$.
N und M sind gleich, wenn $N \subset M$ und $M \subset N$.

[8] Georg Cantor, 1845 – 1918

3.2.2 Beispiele

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\{X : X \text{ ist eine Katze}\} \subset \{X : X \text{ ist ein Säugetier}\}$
- Für alle Mengen M gilt $M \subset M$ und $\emptyset \subset M$.

Bei der Betrachtung von reellen Zahlen spielen folgende Teilmengen oft eine Rolle:

3.2.3 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

$$\begin{aligned} \text{Das } \textit{abgeschlossene Intervall} \text{ von } a \text{ bis } b \text{ ist} \quad & [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \, . \\ \text{Das } \textit{offene Intervall} \text{ von } a \text{ bis } b \text{ ist} \quad &]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \, . \\ \text{Das } \textit{halboffene Intervall} \text{ von } a \text{ bis } b \text{ ist} \quad & [a,b[= [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ \text{beziehungsweise} \quad &]a,b] = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \, . \end{aligned}$$

3.3 Vereinigung, Schnittmenge & Co.

3.3.1 Definition

Die *Vereinigungsmenge* zweier Mengen M und N ist die Menge

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \, .$$

Die *Schnittmenge* zweier Mengen M und N ist die Menge

$$M \cap N = \{x : x \in M \wedge x \in N\} \, .$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, heißen M und N *disjunkt*.

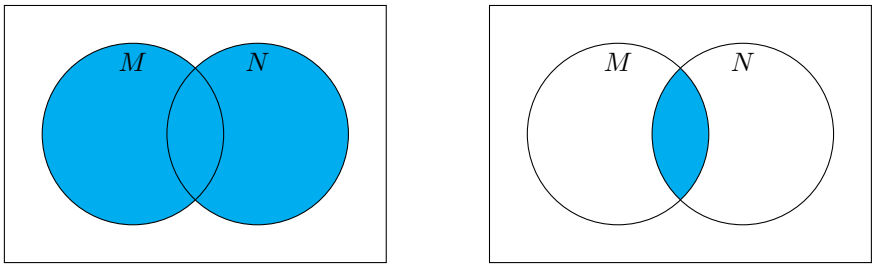


Abbildung 1: Vereinigungs- und Schnittmenge

3.3.2 Beispiele

- Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3\}$. Dann ist $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \cap N = \{2\}$.
- Sei M eine Menge. Dann ist $M \cup \emptyset = M$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$.
- $\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{N}$

3.3.3 Definition

Seien M und N Mengen. Die *Differenzmenge* $M \setminus N$ (gesprochen „M ohne N“) ist

$$M \setminus N = \{x \in M : x \notin N\} .$$

3.3.4 Beispiele

- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$ und $\{2,3\} \setminus \{1,2,3\} = \emptyset$.
- Sei M eine Menge. Dann ist $M \setminus \emptyset = M$ und $\emptyset \setminus M = \emptyset$.

3.3.5 Definition

Sei $M \subset X$ eine Menge. Dann ist das *Komplement* von M

$$M^c = \{x \in X : x \notin M\} .$$

Das Komplement können wir nur bilden, wenn wir M als Teilmenge einer anderen Menge X auffassen. In diesem Fall ist dann $M^c = X \setminus M$.

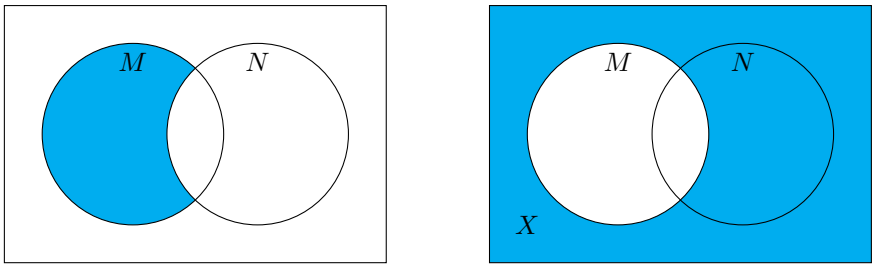


Abbildung 2: Mengendifferenz und Komplement

3.3.6 Satz

Sei X eine Menge mit Teilmengen $M \subset X$ und $N \subset X$. Dann gilt:

(1) $M \cup M^c = X$

(2) $M \cap M^c = \emptyset$

(3) $(M^c)^c = M$

(4) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$

(5) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$

Beweis:

(1): Wir zeigen zuerst $M \cup M^c \subset X$: Nach Voraussetzung ist $M \subset X$ und aus der Definition des Komplements folgt $M^c \subset X$. Damit ist $M \cup M^c \subset X$.

Um zu zeigen, dass $M \cup M^c \supset X$ betrachten wir zwei Fälle: Sei $x \in X$.

Ist $x \in M$, dann folgt $x \in M \cup M^c$.

Ist andererseits $x \notin M$, dann folgt $x \in M^c \Rightarrow x \in M \cup M^c$.

(2): Nehmen wir an, es gäbe ein $x \in M \cap M^c$. Dann folgt $x \in M$ und $x \in M^c$. Ist aber $x \in M^c$, so folgt $x \notin M$, was ein Widerspruch ist.

Die weiteren Aussagen überlasse ich Ihnen als Übungen. □