2 Beweise

2.0.1 Satz (de Morgan[4]-Regeln)

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

(1) $\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)$

(2) $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$

Beweis: Wir beweisen (1) mittels einer Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Wir sehen, dass die letzten beiden Spalten, die die linke und rechte Seite der Behauptung in (1) darstellen, stets die gleichen Wahrheitswerte enthalten, also äquivalent sind. □

Den Beweis von (2) überlasse ich Ihnen als Übungsaufgabe.

2.1 Direkter Beweis

Eine Beweismethode haben wir schon kennengelernt: den *direkten Beweis* (Bezeichnung 1.4.6).

Dabei beweisen wir eine Implikation $A \Rightarrow B$, indem wir von der Voraussetzung A ausgehen und durch evtl. mehrere Implikationen über Zwischenschritte $C_1, C_2, \ldots$ zur Behauptung B gelangen:

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B \ .$$

Ein Beispiel war der Beweis von Satz 1.4.5: Ist $n \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch n^2 gerade.

Wie beweisen wir eine Äquivalenz?

A und B sind äquivalent, wenn sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ gilt. Wir müssen also die Implikationen in beide Richtungen beweisen.

2.1.1 Satz

Sei n eine ganze Zahl. Wenn n gerade ist, genau dann ist auch n^2 gerade.

Mit Satz 1.4.5 haben wir bereits die eine Richtung (n gerade $\Rightarrow n^2$ gerade). Für die Umkehrung brauchen wir noch etwas mehr:

2.1.2 Definition

Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl. p heißt *Primzahl*, wenn p nur die Teiler ± 1 und $\pm p$ hat.

[4] Augustus De Morgan, 1806 – 1871

2.1.3 Satz (Primfaktorzerlegung — ohne Beweis)

Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass

$$n = p_1 \cdots p_k \ .$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Primzahlen.

Beweis: [von Satz 2.1.1]

(1) $2|n \Rightarrow 2|n^2$**:** Dies gilt nach Satz 1.4.5.

(2) $2|n^2 \Rightarrow 2|n$**:** Für $n = 0$ ist die Aussage klar und ± 1 ist nicht gerade. Sei also $n \notin \{-1, 0, 1\}$. Nach Satz 2.1.3 gibt es Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$, so dass

$$\begin{aligned} & n = (\pm 1) \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \qquad (1) \\ \Rightarrow \qquad & n^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_k^2 \end{aligned}$$

Da n^2 gerade ist und da die Primfaktorzerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist, muss 2 einer der Faktoren auf der rechten Seite sein, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p_1 = 2$. Damit ist

$$n^2 = 2^2 \cdot p_2^2 \cdots p_k^2$$

und wir erhalten aus (1)

$$n = (\pm 1) \cdot 2 \cdot p_2 \cdots p_k \ ,$$

das heißt $2|n$.

□

2.2 Beweis durch Kontraposition

Die Grundidee der Kontraposition kann man sich wie folgt klar machen:

„Wenn es regnet, werde ich nass“

ist gleichbedeutend mit

„Wenn ich nicht nass werde, regnet es nicht“.

Formal formuliert:

2.2.1 Lemma

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \ .$$

Durch Negation dreht sich eine Implikation also um.

Beweis:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f
w	w	f	f	w	w

□

Manchmal ist die Kontraposition einer Aussage einfacher zu beweisen, als die ursprüngliche Aussage. Das ist auch in unserem Beispiel Satz 2.1.1 (Ist $n \in \mathbb{Z}$ gerade, genau dann ist auch n^2 gerade) der Fall:

Beweis: [von Satz 2.1.1 (mittels Kontraposition)]

(1) $2|n \Rightarrow 2|n^2$**:** Dies gilt immer noch nach Satz 1.4.5.

(2) $2|n^2 \Rightarrow 2|n$**:** Wir zeigen: wenn n ungerade ist, dann ist auch n^2 ungerade.
Ist n ungerade, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k + 1$. Es ist

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \ .$$

Folglich ist n^2 ungerade.

□

2.3 Beweis durch Widerspruch

Bei einem Widerspruchsbeweis zeigen wir, dass die Behauptung nicht falsch sein kann, d.h. wir beweisen, dass die Negation der Behauptung im Widerspruch zu etwas steht, das wahr ist.

Leider weiß man nicht, wozu der Widerspruch besteht, so dass man nicht in eine bestimmte Richtung arbeiten kann.

Besonders oft hilft diese Beweistechnik, wenn es darum geht zu zeigen, dass es etwas *nicht* gibt. Als Beispiel:

2.3.1 Satz

$\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass es keine ganzen Zahlen n und $m \neq 0$ gibt, mit $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$.

Nehmen wir an, $n, m \neq 0$ seien ganze Zahlen mit $\frac{n}{m} = 2$. O.B.d.A. sei $\frac{n}{m}$ maximal gekürzt, d.h. n und m haben keinen gemeinsamen Teiler ungleich ± 1.

Es gilt

$$2 = \frac{n^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad 2m^2 = n^2 \ .$$

n^2 ist also gerade und nach Satz 2.1.1 damit auch n. Also existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$.

$$\begin{aligned} 2m^2 = n^2 &\Rightarrow 2m^2 = 4k^2 \\ &\Rightarrow m^2 = 2k^2 \\ &\Rightarrow 2|m^2 \\ &\Rightarrow 2|m \ . \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass n und m maximal gekürzt sind. □

Noch ein — berühmtes — Beispiel:

2.3.2 Satz (Euklid[5])

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Sei

$$k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1 \ . \tag{2}$$

Nach Satz 2.1.3 muss auch k durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar sein.

Andererseits bleibt bei Division der rechten Seite von (2) durch eine der Primzahlen immer der Rest 1, k kann also durch keine der Primzahlen teilbar sein. □

2.4 Vollständige Induktion

Die Technik der vollständigen Induktion erlaubt es, Aussagen der Art „für alle natürlichen Zahlen n gilt…“ zu beweisen.

Diese Beweis-Technik basiert auf den Axiomen, die die natürlichen Zahlen charakterisieren. Da wir uns bislang noch gar nicht mit Axiomen befasst haben (der Begriff taucht in der Mathematik-Definition von June Huh auf), wollen wir uns das näher anschauen:

2.4.1 Bezeichnung

Ein *Axiom* ist ein Satz, der weder begründet noch hergeleitet wird, sondern als Grundlage willentlich akzeptiert oder gesetzt wird.

Axiome liefern die Basis, aus der alle anderen Sätze gefolgert werden.

In Abschnitt 1.3 wurde angedeutet, wie sich aus den natürlichen Zahlen die anderen Zahlmengen wie $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$ konstruieren lassen. Die natürlichen Zahlen selbst waren aber einfach vorausgesetzt worden. Wie „definiert“ man nun $\mathbb{N}$? Hier kommen Axiome ins Spiel. Mit diesen legt man fest, was natürliche Zahlen sind:

2.4.2 Satz (Peano[6]-Axiome)

Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist charakterisiert durch:

(1) $1 \in \mathbb{N}$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein *Nachfolger* n' mit $n' \in \mathbb{N}$.

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n' \neq 1$.

(4) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \neq m \ \Rightarrow \ n' \neq m'$.

(5) Ist $1 \in M$ und ist für alle $n \in M$ auch $n' \in M$, dann ist $\mathbb{N} \subset M$.

[5] Euklid von Alexandria, ca. 350 v.Chr. – 270 v.Chr.

Unter dem Nachfolger n' können wir uns $n+1$ vorstellen. Verwenden können wir das in den Axiomen nicht, denn die Addition ist hier noch gar nicht definiert.

Das Axiom 5 der Peano-Axiome heißt *Induktionsaxiom*. Hierauf basiert die Beweis-Technik der vollständigen Induktion:

Gilt etwas für $n=1$ und wissen wir, wenn es für n gilt, dann auch für $n'=n+1$, dann gilt es für alle natürlich Zahlen.

Oder formaler ausgedrückt:

2.4.3 Bezeichnung (Induktionsprinzip)

Sei $A(\cdot)$ eine Aussage über natürliche Zahlen. Haben wir...
(1) $A(1)$ gilt und

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \;\Rightarrow\; A(n+1)$,
dann gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

Um das als Beweis nutzen zu können, müssen wir also zuerst zeigen, dass die Behauptung für $n=1$ gilt („Induktionsverankerung“ oder „Induktionsanfang“). Dann nehmen wir an, die Behauptung gelte für n („Induktionsvoraussetzung“ oder „Induktionsannahme“) und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt („Induktionsschritt“ oder „Induktionsschluss“).

Ein Beispiel:

2.4.4 Satz (Gauss[7])

Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Beweis:

Induktionsanfang $A(1)$: Es gilt

$$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}\ .$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, es gilt $A(n)$, also

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+(n+1) &= 1+2+\cdots+n+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= (n+1)\cdot\frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

[6] Giuseppe Peano, 1858 – 1932
[7] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

und dies ist die Aussage $A(n+1)$. □

Ein ganz typischer Fall für einen Induktionsbeweis sind auch Teilbarkeitsregeln:

2.4.5 Satz
Für alle $n \geq 0$ ist $6^n + 4$ durch 5 teilbar.

Beweis:

In diesem Fall beginnen wir nicht mit $n = 1$, sondern mit $n = 0$:

Induktionsanfang $A(0)$: $5|6^0 + 4 = 5$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $5|6^n + 4$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $6^n + 4 = 5k$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} + 4 &= 6 \cdot 6^n + 4 \\ &= (5+1) \cdot 6^n + 4 \\ &= 5 \cdot 6^n + 6^n + 4 \\ &= 5 \cdot 6^n + 5k \\ &= 5 \cdot (6^n + k) \ , \end{aligned}$$

also $5|6^{n+1} + 4$. □