Vorkurs für Studierende der Mathematik

Dr. Peter Bauer

Institut für Mathematik

Universität Frankfurt am Main

Wintersemester 2026/'27

BY-NC-ND Dieser Text ist unter einer Creative Commons 4.0-Lizenz (Namensnennung, nicht kommerziell, keine Bearbeitungen) lizenziert: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

1 Einleitung

1.1 Organisation

Der Vorkurs und die zugehörigen Übungen finden täglich ab 10 Uhr statt:

10–12	Vorlesung, H III
12–13	Mittagessen und Zeit, die Aufgaben anzuschauen bzw. zu lösen
13–15	Übung zum Vorkurs, H III / H IV

In der Vorlesung wird Stoff vermittelt, in den Übungen werden vor allem Aufgaben besprochen. Die (täglichen) Aufgaben werden auf der Webseite zum Vorkurs veröffentlicht:

Institut für Mathematik → Studium → Orientierungsveranstaltung und Vorkurs
`https://www.fb12.uni-frankfurt.de/115778371/Studium#a_bf2b67a6-b3c06bc9`

1.2 Kursziele

- Annäherung an mathematische Vorlesungen
- Grundlegende mathematische Begriffe und Techniken kennenlernen
- Hinweise und Motivation zum Studium

1.3 Voraussetzungen

Wir setzen einige Begriffe und Schreibweisen voraus, ohne sie exakt zu definieren:

Im täglichen Gebrauch trifft man vor allem auf die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} .$$

Gelegentlich wird auch $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ benutzt.

Eine Erweiterung von $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} .$$

Diese sind "nützlich", da z.B. eine Gleichung wie $n + 5 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{N}$ hat, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n + 5 = 3$. In $\mathbb{Z}$ gibt es eine solche Lösung: mit $n = -2$ gilt $n + 5 = 3$.

In analoger Form lässt sich dies fortsetzen: $2 \cdot a = 5$ ist auch in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, erst in den *rationalen Zahlen* ("Brüche")

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

gibt es eine solche Lösung, nämlich $a = \frac{5}{2}$.

Es gibt auch Gleichungen, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind, z.B. hat $x^2 = 2$ keine rationale Lösung. Diese Lösungen, hier also $\sqrt{2}$, und weitere nicht-rationale Zahlen, wie z.B. die „Kreiszahl" π, bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

1.4 Aussagen, Sätze, Definitionen,...

Was ist überhaupt Mathematik ?

Eine Antwort von June Huh, Fields-Medaillien-Preisträger 2022:

„Mathematik ist ein Gedankengebäude bestehend aus
Aussagen / Sätzen,
die aus gewissen Grundannahmen, genannt
Axiome,
logisch geschlussfolgert werden. Den Prozess des logischen Schlussfolgerns nennen wir
beweisen.“

Das ist alles richtig, klingt aber ein wenig langweilig...

Mathematik ist eine faszinierende Beschäftigung, kann richtig Spaß machen und einen zur Verzweiflung treiben. Man braucht Geduld, Frustrationstoleranz und die Bereitschaft, Dinge aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten.

Schauen wir uns aber an, was sich hinter den verwendeten Begriffen verbirgt:

1.4.1 Bezeichnung

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch sein kann.

1.4.2 Beispiel

- „2 ist eine gerade Zahl.“ ist eine (wahre) Aussage.
- „2 ist eine ungerade Zahl.“ ist eine (falsche) Aussage.
- „$2 + 2$“ ist keine Aussage (da weder wahr noch falsch).

1.4.3 Bezeichnungen

- Eine *Behauptung* ist eine Aussage, von der man noch nicht weiß, ob sie wahr oder falsch ist.
- Ein *Satz* ist eine Aussage, deren Gültigkeit man bereits bewiesen hat.
- Ein *Lemma*[1]ist i.a. ein Hilfssatz, der im Beweis eines Satzes (oder mehrerer Sätze) verwendet wird.
- Ein *Korollar*[2]ist eine Folgerung aus einem Satz.
- *Definitionen* benennen mathematische Objekte oder Eigenschaften mathematischer Objekte. Sie sind weder wahr noch falsch.

Wir schauen uns diese Bezeichnungen im Beispiel an.

Zuerst definieren wir einige Begriffe:

[1] altgriechisch: Einnahme, Annahme
[2] lateinisch corollarium: Zugabe, Geschenk

1.4.4 Definition

Eine ganze Zahl n heißt *gerade*, wenn eine ganze Zahl k existiert, so dass $n = 2k$.
Ist eine ganze Zahl nicht gerade, heißt sie *ungerade*.
Eine ganze Zahl k *teilt* eine ganze Zahl n, geschrieben $k|n$, wenn eine ganze Zahl m existiert, so dass $n = k \cdot m$. In diesem Fall heißt k *Teiler* von n.

1.4.5 Satz

Sei n eine ganze Zahl. Ist n gerade, dann ist auch n^2 gerade.

Beweis: Sei n eine gerade ganze Zahl. Das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n = 2k \ .$$

Daraus folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) \ .$$

Da $2k^2$ auch ganz ist[3], ist n^2 gerade. □

Wie June Huh sagte (Seite 3), bestehen Beweise aus logischen Schlussfolgerungen.

Das sehen wir auch in unserem Beweis zu Satz 1.4.5: Dort haben wir logisch gefolgert, dass wenn die Voraussetzungen wahr sind (n ist ganz und gerade), auch die Behauptung (n^2 ist gerade) wahr ist.

1.4.6 Bezeichnung

Diese Beweistechnik nennt man einen *direkten Beweis*: Wir nehmen an, dass die Vorausetzungen wahr sind und folgern daraus, dass dann auch die Behauptung wahr ist.

1.5 Logische Schlussfolgerungen

Schlussfolgerungen wie im letzten Beweis wollen wir nun einmal etwas formaler anschauen:

1.5.1 Definition

Sei A eine Aussage. Dann ist $\neg A$ („nicht A“) die *negierte* Aussage definiert durch folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
f	w
w	f

1.5.2 Beispiele

Ist $A =$ „Deutschland liegt in Europa.“, dann ist $\neg A =$ „Deutschland liegt nicht in Europa.“.
Ist $A =$ „$3 \cdot 4 = 11$“, dann ist $\neg A =$ „$3 \cdot 4 \neq 11$“.

[3] Streng genommen haben wir das nicht bewiesen, aber wir setzen die Kenntnis der ganzen Zahlen, Addition und Multiplikation ja voraus. In der Linearen Algebra zeigt man, dass die ganzen Zahlen einen *Ring* darstellen, was u.a. bedeutet, dass die Multiplikation von ganzen Zahlen immer eine ganze Zahl liefert.

1.5.3 Definition

Seien A und B zwei Aussagen. Dann ist die *Konjunktion* $A \wedge B$ („A und B“) bzw. die *Disjunktion* $A \vee B$ („A oder B“) definiert durch folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
f	f	f	f
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

1.5.4 Beispiele

Sei A=„Deutschland liegt in Europa.“ und B=„$3 \cdot 4 = 11$“. Dann ist $A \wedge B$ falsch, $A \vee B$, $A \vee \neg B$ und $A \wedge \neg B$ sind richtig.

Wir wissen nun, wie wir Aussagen negieren und verknüpfen können. Schlussfolgerungen bestehen aber insbesondere aus Implikationen und Äquivalenzumformungen:

1.5.5 Definition

Eine Aussage A *impliziert* eine Aussage B, $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B“), wenn B immer dann wahr ist, wenn A wahr ist:

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Ist A wahr, dann folgen daraus nur wahre Aussagen. Wir sehen aber, dass aus einer falschen Aussage sowohl wahre als auch falsche Aussagen gefolgert werden können.

Gilt $A \Rightarrow B$ *und* $B \Rightarrow A$, so gilt B genau dann, wenn A gilt:

1.5.6 Definition

Zwei Aussagen A und B sind *äquivalent*, $A \Leftrightarrow B$, wenn A und B jeweils den gleichen Wahrheitswert (d.h *wahr* bzw *falsch*) haben:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w