Vorkurs für Studierende der Mathematik
Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1
Prüfen Sie, ob die folgenden Definitionen Abbildungen definieren. Falls ja, prüfen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 3x - 6$

(b) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit $x \mapsto 4x + 1$

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 1$

Aufgabe 4.2
Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 4x + 1$. Sei $M = [a, b] \subsetneq \mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Bestimmen Sie das Bild $f(M)$ unter f und das Urbild $f^{-1}(M)$ unter f.

Aufgabe 4.3
Für eine endliche Menge M ist die *Mächtigkeit* $|M| \in \mathbb{N}_0$ definiert als die Anzahl der Elemente von M. Seien nun M und N endliche Mengen.
Beweisen Sie:

(a) Falls eine injektive Abbildung $f : M \to N$ existiert, dann ist $|M| \leq |N|$.

(b) Falls eine surjektive Abbildung $f : M \to N$ existiert, dann ist $|M| \geq |N|$.