Vorkurs für Studierende der Mathematik
Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1
Seien A, B, C Aussagen.

(a) Beweisen Sie die zweite de Morgan-Regel mittels einer Wahrheitstafel:

$$\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$$

(b) Drücken Sie „$A \Rightarrow B$“ mittels $\wedge, \vee$ und $\neg$ aus.

Aufgabe 2.2
Beweisen Sie durch Kontraposition:
Seien n, m ganze Zahlen. Ist $n + m$ gerade, dann sind n und m beide gerade oder beide ungerade.
Hinweis: Führen Sie folgende Schritte durch:

(a) Identifizieren Sie die einzelnen Teilaussagen, aus denen die Implikation zusammengesetzt ist.

(b) Bilden Sie die Kontraposition.

(c) Zeigen Sie die Aussage.

Aufgabe 2.3
Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis: Es existieren keine ganzen Zahlen n, m, so dass $18m + 6n = 1$.

Aufgabe 2.4
Beweisen Sie die *Bernoullische Ungleichung* mit vollständiger Induktion:
Sei x reell mit $x > -1$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Aufgabe 2.5
Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

(a) Für jede gerade Zahl $n \geq 2$ ist $n(n + 2)$ teilbar durch 8.

(b) Sei p eine Primzahl. Dann ist auch $2^p + 1$ prim.