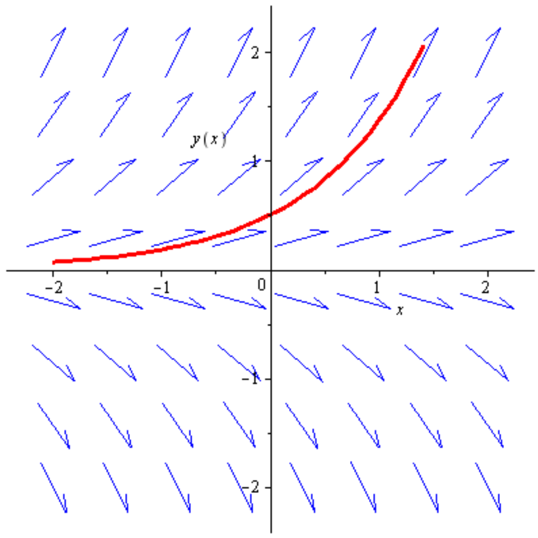

Abbildung 26: Richtungsfeld von $y' = y$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

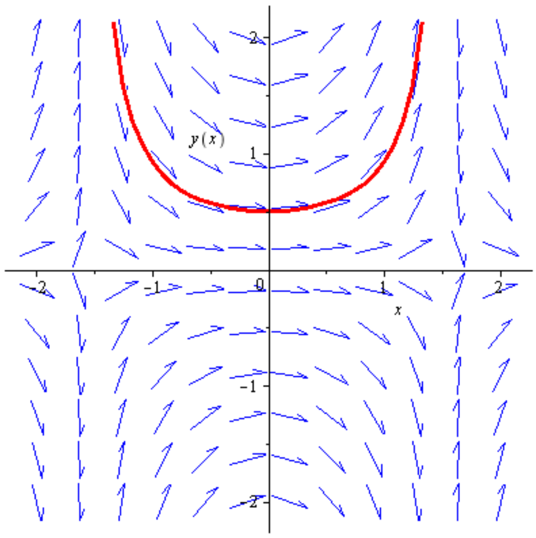

Abbildung 27: Richtungsfeld von $y' = y \cdot \tan x$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

4.4 Autonome Differenzialgleichungen

Typ (B) Autonome Differenzialgleichung $y' = f(y)$

Bei einer *autonomen Differenzialgleichung* taucht x nicht auf der rechten Seite auf. Um eine Lösung herzuleiten, verwenden wir eine „*formale Rechnung*“: dies ist keine mathematisch exakte Überlegung, sondern eher eine Art „Merkregel“, um eine Lösung zu finden. Überraschend oft funktioniert dies und führt zu einem Ergebnis, das sich auch mit exakten Mitteln beweisen ließe:

Sei nun $f(x) \neq 0$. Unsere Differenzialgleichung $y' = f(y)$ kann auch geschrieben werden als

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \qquad \Leftrightarrow \qquad x' = \frac{1}{f(y)} \ .$$

Durch diese formale Rechnung haben wir also x und y vertauscht und so eine Differenzialgleichung des Typs (A) erhalten. Nach (14) finden wir unsere Lösung also auch hier durch Integration und unser Lösungsansatz lautet nun

$$\boxed{x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\, dy} \tag{15}$$

Wenn wir dieses Integral berechnen und die Gleichung dann nach y auflösen, erhalten wir eine Lösung von $y' = f(y)$, wenn $f(y) \neq 0$ ist.

Ist dagegen $f(y) = 0$, dann sei y_0 diese Nullstelle, d.h. $f(y_0) = 0$. Die Funktion $y(x) = y_0$ ist dann eine Lösung von $y' = f(y)$. Solche Lösungen bezeichnet man als *Sonderlösungen*.

4.4.1 Beispiel $y' = y$

Hier ist also $f(y) = y$. Überlegen wir uns zuerst die Sonderlösungen, also die Fälle, in denen $f(y) = 0$. Dies gilt nur für $y = 0$,

$$y(x) = 0$$

ist also die einzige Sonderlösung der untersuchten Differenzialgleichung.

Sei nun $f(y) \neq 0$, d.h. $y \neq 0$. Nach unserem Lösungsansatz (15) erhalten wir

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| + C_1 \ .$$

Dr. Peter Bauer
SS 25 — 4. Juli 2025
Rev: 14158

Dies müssen wir nach y auflösen:

$$x = \ln|y| + C_1 \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{\ln|y|+C_1} = |y| \cdot e^{C_1} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-C_1} \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{-C_1} \cdot e^x \ .$$

$\pm e^{-C_1}$ ist dabei auch nur eine reelle Konstante $C \neq 0$, als Lösungsschar erhalten wir also, wenn wir die obige Sonderlösung hinzunehmen,

$$y(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad y(x) = Ce^x \quad \text{mit } C \neq 0.$$

Eine partikuläre Lösung, zum Beispiel für den Anfangswert $y(1) = 1$, können wir wieder durch Einsetzen in die Lösungsschar finden:

$$y(1) = Ce^1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{e} \ ,$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x = e^{x-1} \ .$$

Wäre andererseits eine Lösung mit $y(1) = 0$ gesucht, dann wäre die Sonderlösung $y(x) = 0$ für alle x die partikuläre Lösung.

4.4.2 Beispiel In Beispiel 4.3.2 haben wir bereits die Reaktionsgeschwindigkeit nullter Ordnung betrachtet. Zerfallsprozesse (also Reaktionen der Art A $\longrightarrow$ B + C) gehorchen dagegen einem Geschwindigkeitsgesetz 1. Ordnung.

Hier ist die Reaktionsgeschwindigkeit proportional von der Konzentration des zerfallenden Stoffs abhängig. Ist $c_A(t)$ die Konzentration von A, gilt also

$$c_A' = k \cdot c_A \ .$$

Dies ist eine autonome Differenzialgleichung. Es ist natürlich $kc_A \neq 0$, sonst würde nichts zerfallen. Daher gibt es keine Sonderlösungen.

Unser Ansatz lautet also

$$t = \int \frac{1}{kc_A} dc_A = \frac{1}{k} \ln|c_A| + C_1 \ .$$

Die Konzentration ist natürlich nicht negativ, also ist $|c_A| = c_A$ und lösen wir dies nach c_A auf, erhalten wir

$$t = \frac{1}{k} \ln c_A + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad k(t - C_1) = \ln c_A \quad \Leftrightarrow \quad c_A = e^{k(t-C_1)} = e^{-kC_1} \cdot e^{kt} = C \cdot e^{kt}$$

mit einer Konstanten $C = e^{-kC_1}$. Diese Konstante lässt sich recht leicht bestimmen:

$$c_A(0) = C \cdot e^0 = C \ ,$$

es handelt sich also gerade um die Anfangskonzentration $c_A(0)$ und insgesamt wird die Reaktionsgeschwindigkeit beschrieben durch

$$c_A(t) = c_A(0)e^{kt} \ .$$

4.5 Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

Typ (C) Differenzialgleichung mit „getrennten Variablen“ $y' = h(x) \cdot g(y)$

Auch hier rechnen wir wieder „formal“: Für $g(y) \neq 0$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)\, dx} \ . \tag{16}$$

Da hier die Variablen x und y getrennt auf den beiden Seiten des „=" stehen, so dass man die Gleichung integrieren kann, spricht man bei diesem Verfahren von einer *Trennung der Variablen.*

An den Nullstellen $g(y_0) = 0$ haben wir dagegen die Sonderlösungen

$$y(x) = y_0 \ .$$

4.5.1 Beispiel $y' = -\frac{x}{y}$

Das Richtungsfeld dieser Differenzialgleichung kennen wir ja schon aus Abbildung 24.

Wir haben hier eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, denn es ist $y' = -x \cdot \frac{1}{y}$, also $h(x) = -x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$.

Da stets $g(y) \neq 0$, gibt es hier keine Sonderlösungen.

Der Lösungsansatz (16) liefert uns

$$\int y\,dy = \int -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -x^2 + C \ ,$$

wobei wir die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 mit $C = 2(C_2 - C_1)$ zu einer Konstanten zusammengefasst haben. Es folgt also

$$y(x) = \pm\sqrt{C - x^2} \ .$$

Suchen wir die partikuläre Lösung zu $y(0) = 2$ (vgl. Abbildung 24), finden wir

$$y(0) = \pm\sqrt{C - 0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 4 \ ,$$

und so

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} \ .$$

4.6 Lineare Differenzialgleichungen

Typ (D) Lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

4.6.1 Bezeichnungen Eine lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ nennt man *homogen*, wenn $r(x) = 0$ für alle x, ansonsten *inhomogen*.

Der Term $r(x)$ wird *Inhomogenität* oder *Störung* genannt.

1. Fall: homogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$

Dies ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen vom Typ (C) mit $h(y) = y$. Sonderlösungen erhalten wir für $h(y_0) = y_0 = 0$, also ist

$$y(x) = 0 \qquad \text{für alle } x$$

die einzige Sonderlösung. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus (16): Sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int g(x)\,dx \\
\Rightarrow \quad \ln|y| + C_1 &= G(x) + C_2 \\
\Rightarrow \quad |y| &= e^{G(x)+C_2-C_1} = e^{G(x)} \cdot e^{C_2-C_1} \\
\Rightarrow \quad y &= C \cdot e^{G(x)} \qquad \text{mit } C = \pm e^{C_2-C_1} \neq 0.
\end{aligned}$$

Die gefundene Sonderlösung $y(x) = 0$ entspricht $C = 0$ in der allgemeinen Lösung, die Lösungsschar einer homogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$\boxed{y(x) = C \cdot e^{G(x)}} \tag{17}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ und wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist.

4.6.2 Beispiel Wir schauen uns ein Beispiel für eine homogene lineare Differenzialgleichung an:

$$y' = 3x^2 y$$

Hier ist $g(x) = 3x^2$. Nach (17) ist die Lösungsschar $y(x) = Ce^{G(x)}$. Als Stammfunktion von $g(x)$ wählen wir $G(x) = x^3$, die Lösungsschar ist also

$$y(x) = C \cdot e^{x^3} \ .$$

Haben wir beispielsweise als Anfangswert $y(-1) = 1$ gegeben, gilt

$$y(-1) = C \cdot e^{(-1)^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e$$

und erhalten deshalb als partikuläre Lösung $y(x) = e \cdot e^{x^3} = e^{x^3+1}$.

2. Fall: inhomogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

Die Lösungsschar einer inhomogenen Differenzialgleichung setzt sich aus der Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zusammen:

4.6.3 Satz Die Lösungsschar einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ ist

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) \ ,$$

wobei

- $y_{\text{hom}}(x)$ die Lösungsschar der homogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$
- $y_{\text{part}}(x)$ eine (beliebige) partikuläre Lösung der linearen Differenzialgleichung

darstellt. Als $y_{\text{part}}(x)$ kann jede Funktion der Schar

$$\int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)}\, dx \cdot y_{\text{hom}}(x)$$

gewählt werden.

4.6.4 Beispiel Ein Beispiel für eine inhomogene lineare Differenzialgleichung wäre:

$$y' = 3x - \frac{y}{x} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=g(x)} \cdot y + \underbrace{3x}_{=r(x)}$$

Die Lösung finden wir in zwei Schritten: zuerst lösen wir die zugehörige homogene Differenzialgleichung $y' = -\frac{1}{x} \cdot y$.

$-\ln x$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{1}{x}$ und daher ist

$$y_{\text{hom}}(x) = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot x^{-1} \ .$$

Im zweiten Schritt berechnen wir eine partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)}\, dx \cdot y_{\text{hom}}(x) &= \int \frac{3x}{C \cdot x^{-1}}\, dx \cdot Cx^{-1} \\ &= 3 \int x^2\, dx \cdot x^{-1} \\ &= \left(x^3 + C_1\right) \cdot x^{-1} \\ &= x^2 + \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir zum Beispiel $y_{\text{part}}(x) = x^2$ als eine partikuläre Lösung, die Lösungsschar unserer inhomogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C \cdot x^{-1} + x^2 \ .$$

4.6.5 Beispiel Überlegen wir uns die Situation beim Sprung mit einem Fallschirm: Bekanntlich genügt die Kraft, die auf einen beschleunigten Körper wirkt, dem Gesetz „Masse mal Beschleunigung“ $m \cdot a$.

Andererseits wirkt auf einen Fallschirmspringer die Erdanziehungskraft $m \cdot g$ durch die Erdbeschleunigung g, die reduziert wird um die Bremswirkung durch den Luftwiderstand des Fallschirms. Diese bremsende Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit v, mit einem Reibkoeffizient $k > 0$ als Proportionalitätskonstante, die Bremskraft ist also $k \cdot v$.

Insgesamt haben wir

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v \ .$$

Die Beschleunigung a ist ja gerade die Veränderung der Geschwindigkeit v, also $v' = a$. Damit erhalten wir

$$mv' = mg - kv \qquad \Leftrightarrow \qquad v' = -\frac{k}{m}\, v + g \tag{18}$$

und dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung.

Wir bestimmen wieder zuerst die Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $v' = -\frac{k}{m}\, v$. $G(t) = -\frac{k}{m}\, t$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{k}{m}$, also ist die Lösungsschar der homogenen Differenzialgleichung

$$v_{\text{hom}}(t) = C \cdot e^{G(t)} = Ce^{-kt/m} \ .$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu finden, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{g}{v_{\text{hom}}(t)}\, dt \cdot v_{\text{hom}}(t) &= \int \frac{g}{e^{-kt/m}}\, dt \cdot e^{-kt/m} \\
&= g \int e^{kt/m}\, dt \cdot e^{-kt/m} \\
&= g \left(\frac{m}{k} e^{kt/m} + C_1 \right) \cdot e^{-kt/m} \\
&= \frac{gm}{k} + C_1 g e^{-kt/m}
\end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir $v_{\text{part}}(t) = \frac{gm}{k}$ und so ist die Lösungsschar von (18)

$$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{gm}{k} \ .$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir, wenn wir annehmen, dass der Springer beim Öffnen des Fallschirms (Zeitpunkt $t = 0$) die Geschwindigkeit v_0 hatte. Dann ist

$$v(0) = Ce^0 + \frac{gm}{k} = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 - \frac{gm}{k} \ ,$$

also ist

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{gm}{k} \right) e^{-kt/m} + \frac{gm}{k} \ .$$

Je länger der Springer am Schirm hängt, desto kleiner wird der erste Summand; es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \frac{gm}{k}$. Egal wie schnell der Springer also beim Öffnen des Fallschirms war, hängt er nur lange genug am Schirm, nähert sich seine Geschwindigkeit dem Wert $\frac{gm}{k}$. Ist der Reibkoeffizient k groß genug, ist diese Geschwindigkeit hinreichend klein, die Landung unbeschadet zu überstehen.

5 Exkurs: Differenzialgleichungen und Schwingungen

5.1 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Bei einer *Differenzialgleichung zweiter Ordnung* tritt neben y und y' auch die zweite Ableitung y'' auf. Ähnlich wie die bereits untersuchten Differenzialgleichungen erster Ordnung haben auch Differenzialgleichungen zweiter Ordnung oft unendlich viele Lösungen, also eine *Lösungsschar*. *Partikuläre Lösungen* gibt es auch hier zu *Anfangswertproblemen*, die nun aber zwei Gleichungen benötigen: Entweder werden sie durch

$$y(a_1) = b_1 \qquad \text{und} \qquad y(a_2) = b_2$$

für $a_1 \neq a_2$ angegeben oder durch

$$y(a_1) = b_1 \qquad \text{und} \qquad y'(a_2) = b_2 \ .$$

Differenzialgleichungen zweiter (oder höherer) Ordnung können im allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden. Eine Ausnahme bilden dabei lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, für die es Lösungsansätze gibt:

5.1.1 Bezeichnungen Eine *lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung* hat die allgemeine Form

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \ .$$

Ist $b(x) = 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich der Differenzialgleichung, dann heißt die Differenzialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Wichtig ist hier ein Begriff, den wir in ähnlicher Form bereits bei Vektoren kennen gelernt haben:

5.1.2 Definition Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ zwei Funktionen. f und g heißen *linear unabhängig*, wenn für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in D$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt werden kann.

Damit können wir nun die Lösungsschar einer homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung konstruieren:

5.1.3 Satz Zu einer homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen, auf einem gemeinsamen Intervall definierten Koeffizientenfunktionen $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$ lassen sich stets zwei linear unabhängige Lösungen $f(x)$ und $g(x)$ finden, so dass die allgemeine Lösungsschar durch

$$y(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. f und g bezeichnet man dann als *Fundamentalsystem*.

Zur Prüfung der linearen Unabhängigkeit zweier Funktionen dient folgendes Kriterium:

5.1.4 Satz Seien f und g Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung. Dann ist die *Wronski-Determinante* von f und g

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}$$

entweder gleich 0 für alle x oder ungleich 0 für alle x. Ist $W(x) \neq 0$, dann sind $f(x)$ und $g(x)$ linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.

5.1.5 Beispiel Betrachten wir die Differenzialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Man kann leicht nachrechnen, dass $y_1(x) = e^{3x}$ und $y_2(x) = e^{-x}$ Lösungen dieser Differenzialgleichung sind. (Wie wir diese finden, sehen wir später.) Es gilt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix} .$$

Da $W(x)$ entweder immer $= 0$ oder immer $\neq 0$ ist, genügt es, $W(x)$ an einer beliebigen Stelle zu berechnen, z.B. in $x = 0$:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0 ,$$

y_1 und y_2 bilden also ein Fundamentalsystem und die Lösungsschar ist daher

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Im Spezialfall, dass die Koeffizientenfunktionen $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$ konstant sind, also gar nicht von x abhängen, können wir das Fundamentalsystem, das die Differenzialgleichung löst, recht leicht angeben. (Das obige Beispiel gehört in diesen Fall, denn da ist $a_1(x) = -2$ und $a_0(x) = -3$.)

5.1.6 Satz Sei $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ eine homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $D = a_1^2 - 4a_2 a_0$ die *Diskriminante* der Differenzialgleichung und es gilt:

1. Fall: D > 0 Mit $\lambda_1 = -\dfrac{a_1 + \sqrt{D}}{2a_2}$ und $\lambda_2 = -\dfrac{a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{\lambda_2 x}$$

ein Fundamentalsystem.

2. Fall: D < 0 Mit $\lambda = -\dfrac{a_1}{2a_2}$ und $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda x} \cos \beta x \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{\lambda x} \sin \beta x$$

ein Fundamentalsystem.

3. Fall: D = 0 Mit $\lambda = -\dfrac{a_1}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x e^{\lambda x}$$

ein Fundamentalsystem.

In allen drei Fällen ist $y(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösungsschar.

5.1.7 Beispiel Betrachten wir die Differenzialgleichung aus Beispiel 5.1.5:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

also $a_2 = 1$, $a_1 = -2$ und $a_0 = -3$. Es folgt

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \quad .$$

e^{-x} und e^{3x} bilden nach unserem Satz also ein Fundamentalsystem und es ist klar, wie die Lösungen aus Beispiel 5.1.5 gefunden wurden.

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Die Lösungsschar einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

kann ähnlich zu inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung bestimmt werden:

(1) Wir ermitteln die allgemeine Lösung y_{hom} der homogenen Differenzialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ .$$

(2) Wir ermitteln (dies ist leider oft schwierig) eine partikuläre Lösung y_{part} der inhomogenen Differenzialgleichung.

(3) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist dann gegeben durch

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) \ .$$

Klassische Beispiele für solche Differenzialgleichungen sind Schwingungen, mit denen wir uns im folgenden Abschnitt befassen.

5.2 Schwingungen

Schwingungen liegen vielen physikalischen und anderen naturwissenschaftlichen Betrachtungen zugrunde. Wir betrachten hier als Beispiel ein *Federpendel*, bei dem eine Masse an einer Feder hängt. Andere Schwingungen werden aber genauso behandelt, beispielsweise hätte ein elektrischer Schwingkreis aus Kondensator und Spule die gleiche mathematische Beschreibung (und Lösung).

Im folgenden wollen wir uns die mathematische Modellierung anschauen.

Ungedämpfte Schwingung

Ein einfacher Fall ist die *ungedämpfte* Schwingung:

Eine Masse m hängt an einer Feder und wird aus der Ruhelage um die Strecke $s_0 = s(0)$ ausgelenkt. $s(t)$ ist jeweils die Auslenkung zur Zeit t.

Zu jedem Zeitpunkt t wirkt die Kraft $F(t)$ der Feder proportional zur Auslenkung $s(t)$ mit einer *Federkonstanten* $k > 0$:

$$F(t) = -k \cdot s(t)$$

($F(t)$ wirkt entgegen der Auslenkung, daher das negative Vorzeichen).

Nach dem Newtonschen Gesetz "Kraft ist Masse mal Beschleunigung" ist andererseits

$$F(t) = m \cdot s''(t)$$

(die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, die Geschwindigkeit $s'(t)$ ist die Ableitung des Weges). Insgesamt ist also $ms''(t) = -ks(t)$ und damit

$$ms''(t) + ks(t) = 0 \ . \tag{19}$$

Dies ist die *Schwingungsdifferentialgleichung einer ungedämpften Schwingung.*

Hier ist also $a_2 = m$, $a_1 = 0$ und $a_0 = k$. Damit ist $D = -4mk < 0$ (2. Fall aus Satz 5.1.6) und wir können das Fundamentalsystem berechnen:

Es ist $\lambda = -\dfrac{a_1}{2a_2} = 0$ und $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2a_2} = \dfrac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

β wird auch *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz* genannt und mit ω_0 bezeichnet. Die *Periodendauer* ist $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und die *Eigenfrequenz* der Schwingung ist $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

$f(t) = \cos \omega_0 t$ und $g(t) = \sin \omega_0 t$ bilden also ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung ist

$$s(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

5.2.1 Beispiel Betrachten wir das Pendel ohne zusätzlichen Anfangsimpuls, d.h. $s'(0) = 0$, und mit einer Anfangsauslenkung $s(0) = s_0$. Das Anfangswertproblem ist hier also

$$s(0) = s_0 \quad \text{und} \quad s'(0) = 0 \ .$$

Es ist $s'(t) = -c_1\omega_0 \sin \omega_0 t + c_2\omega_0 \cos \omega_0 t$, also folgt aus $s'(0) = c_2\omega_0 = 0$, dass $c_2 = 0$. Es folgt weiter $s(t) = c_1 \cos \omega_0 t$, insbesondere $s(0) = c_1 = s_0$ und insgesamt die partikuläre Lösung

$$s(t) = s_0 \cos \omega_0 t \ .$$

5.3 Gedämpfte Schwingungen

In der Praxis werden Schwingungen meist durch Reibung, Luftwiderstand o.ä. gedämpft. Diese Dämpfung ist proportional zur Geschwindigkeit, mit der die Masse sich jeweils bewegt. Beschrieben wird dies durch

$$ms''(t) + \rho s'(t) + ks(t) = 0 \qquad \text{mit einer } \textit{Dämpfungskonstanten } \rho > 0.$$

Dies entspricht der Differenzialgleichung einer ungedämpften Schwingung (19), es kommt jedoch noch eine *Dämpfung* hinzu, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Diese Dämpfung ist also $\rho s'(t)$.

Den Wert $\delta = \dfrac{\rho}{2m}$ nennt man *Abklingkonstante.*

Die Diskriminante dieser Differenzialgleichung ist $D = a_1^2 - 4a_2a_0 = \rho^2 - 4mk$. Hier können nun alle drei Fälle auftreten: $D > 0$, $D < 0$ und $D = 0$.

1. Fall $D > 0 \ \Leftrightarrow \ \rho^2 - 4mk > 0$. Mit $\delta = \frac{\rho}{2m} \ \Leftrightarrow \ \rho = 2\delta m$ folgt daraus

$$4\delta^2 m^2 - 4mk > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta^2 m^2 > mk \quad \Leftrightarrow \quad \delta > \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \ .$$

Es ist also $D > 0 \;\Leftrightarrow\; \delta > \omega_0$, die Abklingkonstante ist größer als die Winkelgeschwindigkeit. Man spricht in diesem Fall von einer *starken Dämpfung*.

Die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung ist nach Satz 5.1.6

$$s(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \ ,$$

wobei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2} = -\frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist in Abbildung 28 dargestellt. Die starke Dämpfung sorgt dafür, dass das Pendel gar nicht hin- und her, sondern in die Ruhelage zurück-„schwingt".

2. Fall $D < 0 \;\Leftrightarrow\; \delta < \omega_0$ (Diese Äquivalenz errechnet sich analog zum ersten Fall). Hier ist die Abklingkonstante kleiner als die Winkelgeschwindigkeit, dies ist eine *schwach gedämpfte* Schwingung.

Hier ist $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{\rho}{2m} = -\delta$ und $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a_2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Mit $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ lautet die allgemeine Lösungsschar also

$$s(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 \cos \omega_\mathrm{d} t + c_2 \sin \omega_\mathrm{d} t\right) \ .$$

Eine solche Funktion ist in Abbildung 29 dargestellt.

3. Fall Der Fall $D = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta = \omega_0$ ist ein Grenzfall zwischen schwacher und starker Dämpfung. Wie im zweiten Fall ist $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{\rho}{2m} = -\delta$ und die Lösungen sind

$$s(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t} \ .$$

Abbildung 30 zeigt eine derartige Funktion.

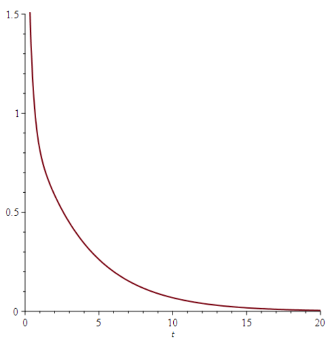

Abbildung 28: Schwingung mit starker Dämpfung

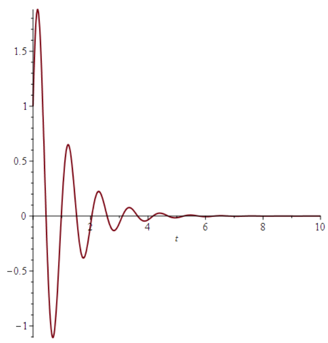

Abbildung 29: Schwingung mit schwacher Dämpfung

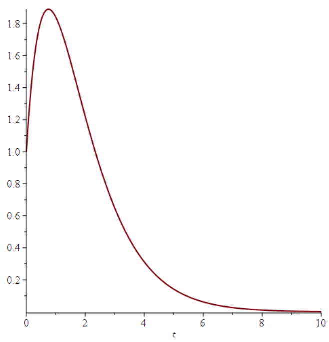

Abbildung 30: Grenzfall zwischen schwacher und starker Dämpfung

Inhaltsverzeichnis

Die Abbildungen 6, 11 und 23 sind Wikimedia Commons entnommen (Public Domain).