2.11.5 Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom hierzu ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \; . \end{aligned}$$

Der p-q-Formel zufolge sind die Nullstellen dieses Polynoms

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \quad ,$$

die Eigenwerte von A sind also 2 und -1.

Um auch die zugehörigen Eigenvektoren zu berechnen, betrachten wir Definition 2.11.1:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Da $(A - \lambda E)$ eine quadratische Matrix ist, ist dies ein homogenes, quadratisches, lineares Gleichungssystem, das wir mit den bekannten Methoden lösen können.

In unserem Beispiel lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \; .$$

(1) Für $\lambda = 2$ haben wir also[3]

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{5}{2}x_2$$

Wir wissen ja, dass Eigenvektoren nicht eindeutig sind, es kann uns also nicht überraschen, dass auch dieses Gleichungssystem mehrere Lösungen hat. Alle Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert 2, z.B. also $\binom{5/2}{1}$ oder $\binom{5}{2}$.

(2) Für den zweiten Eigenwert $\lambda = -1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} 5x_1 - 5x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2$$

Alle Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind also Eigenvektoren zu $\lambda = -1$.

Besonders einfach ist die Ermittlung der Eigenwerte bei Dreiecksmatrizen. Es gilt nämlich:

2.11.6 Satz Sei $A = (a_{ik})$ eine Dreiecksmatrix. Dann sind die Einträge a_{ii} auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten die Eigenwerte von A.

[3] der Gauß-Algorithmus würde natürlich das gleiche Ergebniss liefern, wäre aber aufwändiger

Funktionen mehrerer Variablen

3 Funktionen im $\mathbb{R}^n$

3.1 Bezeichnungen und Beispiele

Naturwissenschaftliche Beobachtungen werden oft mathematisch durch Funktionen beschrieben. Ein Beispiel mag das bekannte Newtonsche Gravitationsgesetz sein: Sind m_1 und m_2 zwei Massen und ist r der Abstand dieser Massen, so bezeichnet $F(m_1, m_2, r) = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ die Kraft, die zwischen diesen Massen wirkt (G ist eine geeignete Konstante). $F(m_1, m_2, r)$ ist also eine Funktion, die drei reelle Werte auf einen reellen Wert abbildet. Dies kann auch als Abbildung eines dreidimensionalen Vektor aufgefasst werden.

Solche Funktionen müssen keine reelle Zahl ergeben, das Ergebnis könnte auch ein mehrdimensionaler Vektor sein.

3.1.1 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine *Funktion* $f : D \to \mathbb{R}^m$ ordnet jedem Vektor $\vec{x} \in D$ einen Vektor $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zu.

D heißt *Definitionsbereich* von f.

Die Menge $W(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m : \vec{y} = f(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in D\}$ ist der *Wertebereich* (das *Bild*) von f.

Vor allem aus Gründen der Bequemlichkeit schreibt man beim Umgang mit Funktionen Vektoren auch als Zeilenvektoren, also z.B. (x, y) statt $\binom{x}{y}$.

3.1.2 Beispiele **(1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$

Diese Funktion wird wegen ihres Graphen auch als *Sattelfläche* (Abbildung 12) bezeichnet.

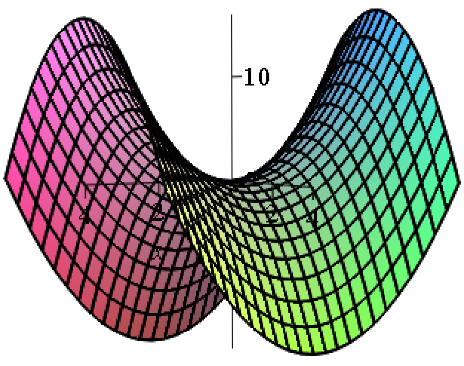

Abbildung 12: $f(x, y) = x^2 - y^2$

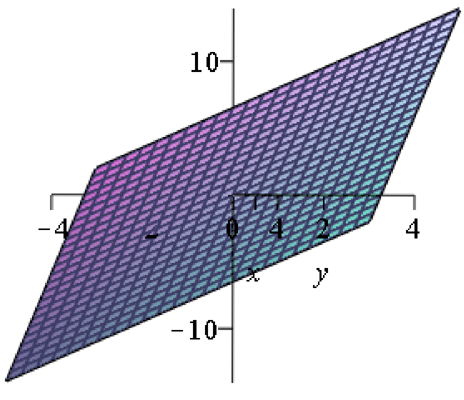

Abbildung 13: $f(x, y) = 2x + \frac{3}{2}y$

(2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x + \dfrac{3}{2}y$

Der Graph einer linearen Funktion wie dieser stellt eine Ebene dar (Abbildung 13).

(3) $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Diese Funktion ist offenbar für $x^2 + y^2 > 1$ nicht definiert. Innerhalb des Definitionsbereichs stellt der Graph eine Halbkugel dar (Abbildung 14).

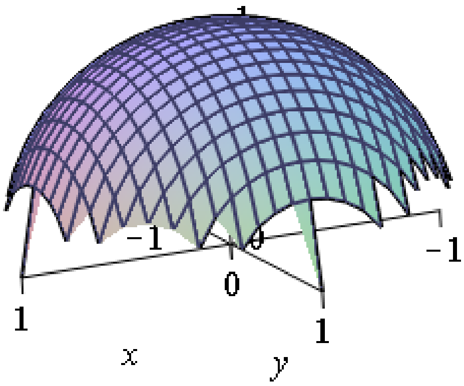

Abbildung 14: $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

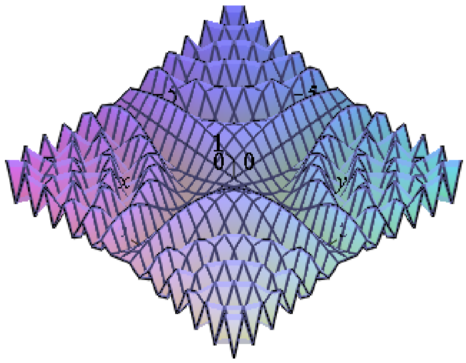

Abbildung 15: $f(x,y) = \sin(xy)$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sin(xy)$ (Abbildung 15)

(5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y,z) = (4x - 2y^2, z^2 - xy)$

Der Graph dieser Funktion ist 5-dimensional, also nicht darstellbar.

(6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\sin t, t)$

Während die Graphen von Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ „Berg- und Tallandschaften" ähneln, sind Graphen von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ Kurven im Raum. Der Graph dieser Funktion ist eine schräg im Raum liegende Sinuskurve (Abbildung 16).

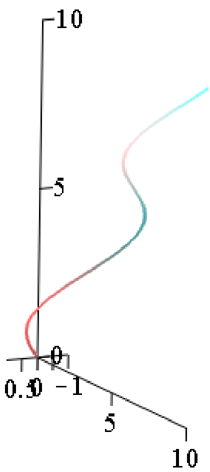

Abbildung 16: $f(t) = (\sin t, t)$

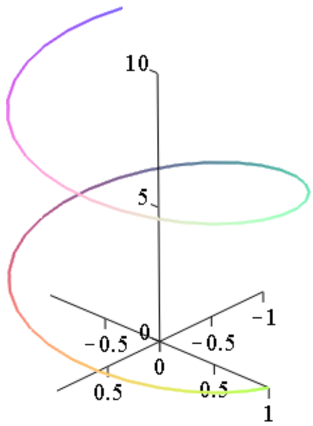

Abbildung 17: $f(t) = (\sin t, \cos t)$

(7) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\sin t, \cos t)$ Hier ist der Graph eine Schraubenlinie (Abbildung 17).