Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsaufgaben

Zusatzaufgaben — Lösungen

Aufgabe 10.1

(a) $y' = y^2$ mit $y(0) = 0$: Typ (B), autonome DGL mit $f(y) = y^2$

Sonderlösung für $f(y_0) = y_0^2 = 0$, also $y_0 = 0$: $y(x) = 0$ für alle x.

Allgemeine Lösungsschar:

$$x = \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{C - x}$$

Partikuläre Lösung: In der allg. Lösung ist $y(0) = \frac{1}{C} \neq 0$ für alle C, also ergibt sich die partikuläre Lösung aus der Sonderlösung:

$$y(x) = 0 \qquad \text{für alle } x\ .$$

(b) $y' = 1 + y^2$ mit $y(0) = 0$: Typ (B), autonome DGL mit $f(y) = 1 + y^2$

Sonderlösung: $f(y_0) = 1 + y_0^2 \neq 0$ für alle y_0, es gibt also keine Sonderlösungen.

Allgemeine Lösungsschar:

$$x = \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan y + C$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = \tan(x - C)$$

Partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} & y(0) = \tan(-C) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \frac{\sin(-C)}{\cos(-C)} = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \sin(-C) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt für $C = 0$, eine partikuläre Lösung ist also

$$y(x) = \tan(x)\ .$$

(c) $y' = y \tan x$ mit $y(0) = 1$: Typ (C), DGL mit getrennten Variablen
Sonderlösung für $y_0 = 0$, also $y(x) = 0$ für alle x.
Allgemeine Lösungsschar: Wegen $(-\ln(\cos x))' = -\sin x \cdot \frac{-1}{\cos x} = \tan x$ gilt

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{y}\, dy = \int \tan x \, dx \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = -\ln(\cos x) + C_1 \\ \Rightarrow \quad & |y| = e^{-\ln(\cos x) + C_1} = \frac{1}{\cos x} \cdot e^{C_1} \\ \Rightarrow \quad & y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{\neq 0} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ \Rightarrow \quad & y = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{mit } C \neq 0 \end{aligned}$$

Zusammen mit der Sonderlösung $y(x) = 0$ ergibt sich also als Lösungsschar

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}\ .$$

Partikuläre Lösung: $y(0) = \frac{C}{\cos 0} = 1$, also $C = 1$. Die partikuläre Lösung ist deshalb

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\ .$$

(d) $y' = 2x\sqrt{y}$ mit $y(1) = 1$: Typ (C), DGL mit getrennten Variablen
Sonderlösung für $\sqrt{y_0} = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 0$, also $y(x) = 0$ für alle x.
Allgemeine Lösungsschar:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int 2x \, dx \\ \Rightarrow \quad & 2\sqrt{y} = x^2 + C \qquad (1) \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + C\right)^2\ . \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y(1) = \frac{1}{4}(1 + C)^2 = 1 \;\Rightarrow\; C = 1$ oder $C = -3$.
Da $\sqrt{y} \geq 0$ folgt aus Gleichung (1), dass $C \geq 0$ gilt, und somit bleibt nur $C = 1$. Die partikuläre Lösung ist also

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + 1\right)^2\ .$$

(e) $y' = \dfrac{\ln x}{x} \cdot e^{-y}$ mit $y(1) = 0$: Typ (C), DGL mit getrennten Variablen

Sonderlösung: $e^{-y_0} \neq 0$ für alle y_0, es gibt also keine Sonderlösungen.

Allgemeine Lösungsschar: Wegen $((\ln x)^2)' = \frac{2\ln x}{x}$ ist

$$
\begin{aligned}
& & \int \frac{1}{e^{-y}}\, dy &= \int \frac{\ln x}{x}\, dx \\
&\Rightarrow & e^y &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \\
&\Rightarrow & y(x) &= \ln\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C\right)
\end{aligned}
$$

Partikuläre Lösung: $y(1) = \ln(C) = 0$, also $C = 1$ und folglich

$$
y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + 1\right) \; .
$$

(f) $y' = -2y \sin x \cos x + e^{(\cos x)^2}$ mit $y(0) = 1$: Typ (D), inhomogene lineare DGL

Wegen $((\cos x)^2)' = -2 \sin x \cos x$ ist

$$
\begin{aligned}
y_{\text{hom}}(x) &= C \cdot e^{G(x)} \quad \text{mit } G(x) = (\cos x)^2 \\
&= C \cdot e^{(\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

und weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
y_{\text{part}}(x) &= \int \frac{e^{(\cos x)^2}}{Ce^{(\cos x)^2}}\, dx \cdot Ce^{(\cos x)^2} \\
&= \int 1\, dx \cdot e^{(\cos x)^2} \\
&= xe^{(\cos x)^2} \; .
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösungsschar ist daher

$$
y(x) = C \cdot e^{(\cos x)^2} + xe^{(\cos x)^2} \; .
$$

Partikuläre Lösung: $y(0) = C \cdot e^1 = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{e}$ und somit

$$
y(x) = \left(\frac{1}{e} + x\right) e^{(\cos x)^2} \; .
$$