

Musterlösung Übung 9

9.1

$$\begin{aligned} \text{a) } \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} &= -1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) \\ &\quad - 4 \cdot (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 1. \text{ Zeile} \times (-1) \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -2 \times 1. \text{ Zeile} \\ -4 \times 1. \text{ Zeile} \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \times (-1) \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid +2 \times 2. \text{ Zeile} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mid \times (-1) \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} +2 \times 3. \text{ Zeile} \\ +4 \times 3. \text{ Zeile} \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.2

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -1. \text{ Zeile} \\ -2 \times 1. \text{ Zeile} \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} -1. \text{ Zeile} \\ -2 \times 2. \text{ Zeile} \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid :(-2) \\ &x_3 = -1; x_2 = 0; x_1 = -3 \end{aligned}$$

9.3

Aufgabe 9.3

Wo liegen die lokalen Extrema der folgenden Funktion?

$$f(x, y) = 2x^3 - 4y^3 - x^2 - 2y^2$$

1. Ableitung in Jacobi-Matrix

3.3.6 Definition Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\vec{x})$.

Die (m, n) -Matrix

$$f'(\vec{x}) = Df(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$f'(x, y) = (6x^2 - 2x \quad -12y^2 - 4y)$$

Notwendige Bedingung: $f'(x, y) = 0$

$$f'(x, y) = (6x^2 - 2x \quad -12y^2 - 4y) = 0$$

$$f'(x, y) = (0 \quad 0)$$

$$6x^2 - 2x = 0 \mid \text{ausklammern}$$

$$2x(3x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$-12y^2 - 4y \mid \text{ausklammern}$$

$$-4y(3y + 1) = 0 \rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = -\frac{1}{3}$$

2. Ableitung in Hesse-Matrix

3.4.7 Definition Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die (n, n) -Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in $\vec{a} \in D$ heißt *Hesse-Matrix* von f in $\vec{a}$

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1}(\vec{a}) & f_{x_1, x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_1, x_n}(\vec{a}) \\ f_{x_2, x_1}(\vec{a}) & f_{x_2, x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_2, x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n, x_1}(\vec{a}) & f_{x_n, x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_n, x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}.$$

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 2 & 0 \\ 0 & -24y - 4 \end{pmatrix}$$

Hinreichende Bedingung $f''(x, y) \neq 0$

$$f''(x_1 = 0) = 12x - 2 = -2 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''\left(x_2 = \frac{1}{3}\right) = 12x - 2 = 2 \rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f''(y_1 = 0) = -24y - 4 = -4 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''\left(y_2 = -\frac{1}{3}\right) = -24y - 4 = 4 \rightarrow \text{Tiefpunkt}$$