Musterlösung Übung 6

6.1

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$ — Stetig im gesamten Definitionsbreich

(b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R} \,, \quad f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ — Stetig im gesamten Definitionsbreich

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,, \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{für } y < 0 \end{cases}$ — Unstetig in $\binom{x}{0}$

6.2

Aufgabe 6.2

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{y} \,,\ \ln(x+y) \right)$$

1. Ableitung in Jacobi-Matrix

3.3.6 Definition Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\vec{x})$.

Die (m,n)-Matrix

$$f'(\vec{x}) = Df(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ \dfrac{1}{\ln(x+y)} & \dfrac{1}{\ln(x+y)} \end{pmatrix}$$

2. Ableitung in jeweils getrennten Hesse-Matrizes für die beiden Funktionen

3.4.7 Definition Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die (n,n)-Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in $\vec{a} \in D$ heißt *Hesse-Matrix* von f in $\vec{a}$

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(\vec{a}) & f_{x_1,x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_1,x_n}(\vec{a}) \\ f_{x_2,x_1}(\vec{a}) & f_{x_2,x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_2,x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n,x_1}(\vec{a}) & f_{x_n,x_2}(\vec{a}) & \cdots & f_{x_n,x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} .$$

2.1 $f1(x,y) = \frac{x^2}{y}$

$$f1''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

2.2 $f2(x,y) = \ln(x+y)$

$$f1''(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)ln^2(x+y)} & -\frac{1}{(x+y)ln^2(x+y)} \\ -\frac{1}{(x+y)ln^2(x+y)} & -\frac{1}{(x+y)ln^2(x+y)} \end{pmatrix}$$

Rechenweg

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\ln(x+y)}\right]$$

$$= -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x+y)]}{\ln^2(x+y)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x+y} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x+y]}{\ln^2(x+y)}$$

$$= -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y]}{(x+y)\ln^2(x+y)}$$

$$= -\frac{1+0}{(x+y)\ln^2(x+y)}$$

$$= -\frac{1}{(x+y)\ln^2(x+y)}$$

1. Kehrwertregel: $\left[\frac{1}{u(x)}\right]' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
2. Ableitung vom ln
3. Variablen trennen
4. Bruch unter Bruchstrich

(b) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

i.) $f(x, y, z) = \left(z^2 e^{xy}\ ,\ \sqrt{xyz}\right)$ ii.) $f(t) = (t \sin t\ ,\ t \cos t)$

i.) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 y e^{xy} & z^2 x e^{xy} & 2z e^{xy} \\ \frac{yz}{2\sqrt{xyz}} & \frac{xz}{2\sqrt{xyz}} & \frac{xy}{2\sqrt{xyz}} \end{pmatrix}$

ii.) $f'(t) = (\sin(t) + t\cos(t) \quad \cos(t) - t\sin(t))$

Aufgabe 6.3

(a) Berechnen Sie die Tangentialebene im Punkt $(0, 0)$ von

$$f(x, y) = x^2 + \sin y\ .$$

(b) In welcher Richtung steigt die Funktion in diesem Punkt am stärksten an?

a) 1. Ableitung:

$$f'(x,y) = (2x \quad \cos\ y)$$

2. Ableitung in Punkt (0/0):

$$f'(0{,}0) = (0, \quad 1)$$

3. Einsetzen in Formel:

3.3.8 Bemerkung Im Fall eindimensionaler Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt die Ableitung in einem Punkt a bekanntlich gerade die Steigung der Tangenten in diesem Punkt an. Die Tangente ist eine Gerade $t(x) = A + B \cdot (x - a)$ (Geradengleichung), wobei $A = f(a)$ den Funktionswert an der Stelle a und $B = f'(a)$ die Steigung bezeichnet:

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)\ .$$

Im mehrdimensionalen Fall, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ist dies vergleichbar mit der *Tangentialebene* in einem Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$T(\vec{x}) = f(\vec{a}) + f'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})\ . \qquad (8)$$

$$T(\vec{x}) = (0) + (0 \ \ 1) \times \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{x}) = (0) + \begin{pmatrix} 0 \times x \\ 1 \times y \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{x}) = y$$

b) stärkster Anstieg = Gradient = Vektor der partiellen Ableitung am Punkt (0/0)

$$f'(x,y) = (\ 2x \ \ cosy)$$

$$grad\ f\ (0{,}0) = (0{,}1)$$