MfN Blatt 5

Nr. 5.1

a)
$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 0 & \\
\text{II} & x_1+3x_2+x_3+2x_4 = 0 & \mid \text{II}-\text{I} \\
\text{III} & 2x_1+5x_2+x_3+3x_4 = 0 & \mid \text{III}-2\cdot\text{I} \\
\text{IV} & x_2+3x_3-3x_4 = 0 & \mid \\
\text{V} & 2x_1 \quad +5x_2+5x_4 = 0 & \mid \text{V}-2\cdot\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 0 & \\
\text{II} & x_2+2x_3-x_4 = 0 & \\
\text{III} & x_2+3x_3-3x_4 = 0 & \mid \text{III}-\text{II} \\
\text{IV} & x_2+3x_3-3x_4 = 0 & \mid \text{IV}-\text{II} \\
\text{V} & x_2+2x_3-x_4 = 0 & \mid \text{V}-\text{II}
\end{array}$$

III, IV: dieselbe Gleichung
II, V: dieselbe Gleichung

$$\begin{array}{lrl}
\Rightarrow \text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 0 & \\
\text{II} & x_2+2x_3-x_4 = 0 & \\
\text{III} & x_3-2x_4 = 0 & \\
\text{IV} & x_3-2x_4 = 0 & \\
\text{V} & 0 = 0 & \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen!}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 1 & \\
\text{II} & x_1+3x_2+x_3+2x_4 = 1 & \mid \text{II}-\text{I} \\
\text{III} & 2x_1+5x_2+x_3+3x_4 = 1 & \mid \text{III}-2\cdot\text{I} \\
\text{IV} & x_2+3x_3-3x_4 = 1 & \\
\text{V} & 2x_1+5x_2 \quad +5x_4 = 1 & \mid \text{V}-2\cdot\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 1 & \\
\text{II} & x_2+2x_3-x_4 = 0 & \\
\text{III} & x_2+3x_3-3x_4 = -1 & \mid \text{III}-\text{II} \\
\text{IV} & x_2+3x_3-3x_4 = 1 & \mid \text{IV}-\text{II} \\
\text{V} & x_2+2x_3-x_4 = -1 & \mid \text{V}-\text{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 1 \\
\text{II} & x_2+2x_3-x_4 = 0 \\
\text{III} & x_3-2x_4 = -1 \\
\text{IV} & x_3-2x_4 = 1 \\
\text{V} & 0 = -1 \ \lightning
\end{array}$$

Widerspruch, LGS hat keine Lösungen!

Nr. 5.2

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 2\cdot 2$$
$$= -(1+\lambda)\cdot(1-\lambda) - 2\cdot 2$$
$$= -(1^2-\lambda^2) - 2\cdot 2$$
$$= \lambda^2 - 1^2 - 4 = \lambda^2 - 5$$

Eigenwerte:
$$0 = \lambda^2 - 5 \quad \mid +5$$
$$\lambda^2 = 5 \quad \mid \sqrt{\ }$$
$$\lambda_1 = \sqrt{5}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

Eigenvektoren: $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{0}$

<u>Für $\lambda=\sqrt{5}$:</u> $\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5} & 2\\ 2 & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix}\text{I} & (-1-\sqrt{5})x_1 + 2x_2 = 0\\ \text{II} & 2x_1 + (1-\sqrt{5})x_2 = 0\end{matrix}$ $\mid \text{II}-\left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)\cdot\text{I}$

$\begin{matrix}\text{I} & (-1-\sqrt{5})x_1 + 2x_2 = 0\\ \text{II} & 0 = 0\end{matrix}$

$\hookrightarrow$ unendlich viele Lösungen

$(-1-\sqrt{5})x_1+2x_2=0$

$(-1-\sqrt{5})x_1=-2x_2$

$x_1=\frac{-2}{(-1-\sqrt{5})}x_2 \Rightarrow$ $\cancel{\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{(-1-\sqrt{5})}x_2\\x_2\end{pmatrix}}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{(-1-\sqrt{5})}\\1\end{pmatrix}\cdot x_2$

<u>Für $\lambda=-\sqrt{5}$:</u> $\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5} & 2\\ 2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=0 \Rightarrow$ $\begin{matrix}\text{I} & (-1+\sqrt{5})\cdot x_1 + 2x_2 = 0\\ \text{II} & 2x_1 + (1+\sqrt{5})x_2 = 0\end{matrix}$ $\mid \text{II}-\frac{2}{(-1+\sqrt{5})}\cdot\text{I}$

$\begin{matrix}\text{I} & (-1+\sqrt{5})x_1 + 2x_2 = 0\\ \text{II} & 0 = 0\end{matrix}$

$\hookrightarrow$ unendlich viele Lösungen

$(-1+\sqrt{5})x_1+2x_2=0$

$(-1+\sqrt{5})x_1=-2x_2$

$x_1=\frac{-2}{(-1+\sqrt{5})}x_2$

$\Rightarrow$ $\cancel{\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{(-1+\sqrt{5})}x_2\\x_2\end{pmatrix}}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{(-1+\sqrt{5})}\\1\end{pmatrix}\cdot x_2$

b) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom: $P(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E)=\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

$=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0\\0&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)-0\cdot0$

$=1^2-2\lambda+\lambda^2$

Eigenwerte:

$0=\lambda^2-2\lambda+1 \quad \mid p=-2,\ q=1$

$\lambda_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{(-2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-1}=\underline{\underline{1\pm0}}$

Eigenvektoren:

Für $\lambda=1$: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}$ da unendlich viele Lösungen

$\cancel{v_1=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}}$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot x_1,\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot x_2$

c) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

charakteristisches Polynom: $P(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot E)=\det\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$

$=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&2&3\\0&2-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)+2\cdot0\cdot0+3\cdot0\cdot0-0\cdot(2-\lambda)\cdot3$

$-0\cdot0\cdot(1-\lambda)-(-1-\lambda)\cdot0\cdot2$

$=(1-\lambda)\cdot(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$

$=\lambda^2-\lambda-2-\lambda^3+\lambda^2+2\lambda=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$

Eigenwerte: $0=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

Eigenvektoren:

Für $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II} & 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ \text{III} & 0 = 0 \end{array}$$

↳ unendlich viele Lösungen

I: $2x_1 + 3x_3 = 0$
$2x_1 = -3x_3$
$x_1 = -1{,}5\,x_3$

$$\longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II} & 0 = 0 \rightarrow \text{unendlich viele Lösungen} \\ \text{III} & -3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

I: $-x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 = 2x_2$

$$\longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \text{II} & x_2 = 0 \\ & -2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergänzung Nr. 5.1

a) $x_4 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$

Einsetzen in III: $x_3 - 2a = 0$
$x_3 = 2a$

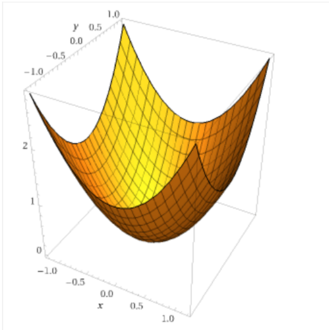
Einsetzen in II: $x_2 + 2 \cdot 2a - a = 0$
$x_2 + 3a = 0$
$x_2 = -3a$

Einsetzen in I: $x_1 + 2 \cdot (-3a) - 2a + 3a = 0$
$x_1 - 5a = 0$
$x_1 = 5a$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Aufg. 5.3 (a)

```
plot x^2+y^2
```



Aufg. 5.3 (b)

```
plot (2*x^2+y^2)*e^(-x^2-y^2)
```