

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Musterlösung Blatt 4

Aufgabe 4.1

(a) Berechnung des metrischen Tensors nach Satz 2.7.1.

$$G = (T_E^B)^T \cdot T_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 0+2+0 & 1+1+0 \\ 0+2+0 & 0+4+0 & 0+2+0 \\ 1+1+0 & 0+2+0 & 1+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det(G) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

$$V = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \sqrt{\det(G)} = 2$$

Aufgabe 4.2

(a)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -2 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = -2 \cdot (-2) = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ eindeutig lösbar

Inverse berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \text{ II} - 2 \cdot \text{I}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \text{ III} + 3 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{II} \Leftrightarrow \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{I} + \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{II} + 4 \cdot \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \text{II} \\ \frac{-1}{2} \cdot \text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right) = A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{-5}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot \frac{-5}{2} + 2 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot 0 + \frac{-1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{9}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{eindeutig lösbar}$$

Inverse berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{II} - 2 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{1}{3} \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \text{I} + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) = A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \\ \frac{-2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & | & 6 \\ 1 & 2 & 4 & | & 4 \\ 2 & 3 & 7 & | & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -5 \cdot \text{II} \\ \\ -2 \cdot \text{II} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & | & -14 \\ 1 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3 \cdot \text{III} \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & | & -5 \\ 1 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \text{I} \Leftrightarrow \text{II} \\ \text{II} \Leftrightarrow \text{III} \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2 \cdot x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3 \Leftrightarrow 1 \cdot x_2 + 1 \cdot \frac{5}{2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 4 \Leftrightarrow 1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{5}{2} = 4 \Leftrightarrow x_1 = -7$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 & | & -9 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & | & -13 \\ 1 & -11 & 0 & 3 & | & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \cdot \text{III} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & | & 4 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & | & -13 \\ 1 & -11 & 0 & 3 & | & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \cdot \text{I} \\ -3 \cdot \text{I} \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & | & 4 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & | & -13 \\ -5 & -8 & 0 & 0 & | & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +2 \cdot \text{II} \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & | & 4 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & | & -13 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{II} \Leftrightarrow \text{III} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 0 & | & -13 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & | & 4 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tauschen der Spalten (zugehörige x Komponente)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & | & \\ 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & | & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow -7 \cdot x_1 = -4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{7}$$

$$\rightarrow 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_1 = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot x_2 - 1 \cdot \frac{4}{7} = 4 \Leftrightarrow x_2 = \frac{8}{7}$$

$$\rightarrow 2 \cdot x_3 - 1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_1 = -13 \Leftrightarrow 2 \cdot x_3 - 1 \cdot \frac{8}{7} - 4 \cdot \frac{4}{7} = -13 \Leftrightarrow x_3 = \frac{-67}{14}$$

$$\rightarrow 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot x_4 + 0 \cdot \frac{-67}{14} - 1 \cdot \frac{8}{7} + 2 \cdot \frac{4}{7} = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{-67}{14} \\ 0 \end{pmatrix}$$