Musterlösung Übung 3

1) Inverse berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid (-2)\cdot \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid -1\cdot \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid -1\cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid -\mathrm{I} \\ \\ \mid +\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot (-2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid +\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid +\mathrm{III} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid + \mathrm{IV} \\ \mid \cdot 2 \end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{IV} \\ \mid + \mathrm{IV} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid - 2 \cdot \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

2) Determinanten berechnen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = \underline{\underline{-4}}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow$

$$= +3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot \left[-5 \cdot \det \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}}_{① \; 0} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}}_{② \; 0} \right] + 3 \cdot \left[-4 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{③ \; 0} - 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{④ \; 0} \right]$$

Sarrus:

① $\left|\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \\ 0 & -4 \end{matrix}$ $= 2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-4) - 0 \cdot 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 1$

$= 20 + 0 - 24 - 0 + 0 + 4$

$= 0$

② $\left|\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{matrix}$ $= 4 + 0 + 32 - 0 - 24 - 12$

$= \underline{0}$

③ $\left|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix}$ $= 0 - 20 + 0 - 4 - 0 + 24$

$= \underline{0}$

④ $\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix}$ $= +8 - 20 + 0 - 12 - 0 + 24$

$= 0$

$\det(A) = 3 \cdot [-5 \cdot 0 - 2 \cdot 0] + 3 \cdot [-4 \cdot 0 - 3 \cdot 0)]$

$= \underline{\underline{0}}$

c) $\det \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = 1+0+2-0-2-0 = \underline{\underline{1}}$

d) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$

$= -2 \underset{①}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}} + 4 \underset{②}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}} - \underset{③}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}}$

① $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot6\cdot0 + 3\cdot5\cdot4 + 4\cdot7\cdot(-3) - 4\cdot6\cdot4 - (-3)\cdot5\cdot2 - 0\cdot7\cdot3 = \underline{-90}$

② $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot0 + 2\cdot5\cdot3 + 4\cdot1\cdot4 - 3\cdot7\cdot4 - 4\cdot5\cdot1 - 0\cdot1\cdot2 = \underline{-58}$

③ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot7\cdot(-3) + 2\cdot6\cdot3 + 3\cdot1\cdot4 - 3\cdot7\cdot3 - 4\cdot6\cdot1 - (-3)\cdot1\cdot2 = \underline{-54}$

$\det(A) = -2\cdot(-90) + 4\cdot(-58) - (-54)$

$= 2$

3.3 $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T_E{}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $T_E{}^B \cdot \vec{v}_B = \vec{v}_E$ $\qquad$ $T_E{}^B \cdot \vec{w}_B = \vec{w}_E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $T_B{}^E = (T_E{}^B)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 zeile minus 3 zeile
2. zeile minus 1. zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. zeile als 3. zeile
2. zeile geteilt durch 2
3. zeile als 1. zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_B = T_B{}^E \cdot \vec{x}_E$ $\qquad$ $\vec{y}_B = T_B{}^E \cdot \vec{y}_E$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$