

Musterlösung Aufgabenblatt 2

Nr. 2.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$d) \angle(\vec{c}, \vec{b}) = \alpha$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arccos(0.5) = 60^\circ$$

Nr. 2.2

$$a) A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 - 0 \\ 0 - 8 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 1^2} = 9 \text{ FE}$$

$$b) V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 8 \\ 8 - 2 \\ -2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$V = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = |2 \cdot (-10) - 1 \cdot 6 + 0 \cdot (-4)| = |-20 - 6| = |-26| = 26 \text{ VE}$$

Nr. 2.3

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) nicht definiert, da $A = (a_{ij})$ und $B \neq (b_{jk})$

$$c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2)$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

