Mathematik für Naturwissenschaftler II

Musterlösung Blatt 1

Aufgabe 1.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\| &= \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\
\|\vec{b}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\
\|\vec{c}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2 \\
\vec{b} \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -6
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

Position der Atome:

$$\vec{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{H}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{H}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Abstand zwischen C und (beliebigem)H Atom:

$|\overrightarrow{CH_x}| = \|\vec{H}_x - \vec{C}\| = \|\vec{H}_x\| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{3}$

Abstand zwischen H Atomen(aus Symmetriegründen reicht es auch aus den Abstand zwischen nur einem Paar zu berechnen):

$$|\overrightarrow{H_1H_2}| = \|\vec{H}_1 - \vec{H}_2\| = \| \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{H_1H_3}| = \|\vec{H}_1 - \vec{H}_3\| = \| \begin{pmatrix} 1-(1) \\ 1-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{H_1H_4}| = \|\vec{H}_1 - \vec{H}_4\| = \| \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{H_2H_3}| = \|\vec{H}_2 - \vec{H}_3\| = \| \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{H_2H_4}| = \|\vec{H}_2 - \vec{H}_4\| = \| \begin{pmatrix} -1-(-1) \\ -1-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{H_3H_4}| = \|\vec{H}_3 - \vec{H}_4\| = \| \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ -1-1 \\ -1-(-1) \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

(b)

$$cos(\sphericalangle(H_1, C, H_2)) = \frac{\overrightarrow{CH_1} \cdot \overrightarrow{CH_2}}{\|\overrightarrow{CH_1}\|\|\overrightarrow{CH_2}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(H_1, C, H_2) = arccos(\frac{-1}{3}) \approx 109.47^\circ$$

$$cos(\sphericalangle(H_2, H_1, H_3)) = \frac{\overrightarrow{H_1H_2} \cdot \overrightarrow{H_1H_3}}{\|\overrightarrow{H_1H_2}\|\|\overrightarrow{H_1H_3}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(H_2, H_1, H_3) = arccos(\frac{1}{2}) = 60^\circ$$