3. Formelblatt

3.1 Eine Folge $(\vec{x}_k)$ mit $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ des $\mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{ki})_k$ konvergieren.

3.2 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist *stetig* in $\vec{a} \in D$, wenn für *alle* Folgen mit $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$. $f(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})\big)$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ stetig sind.

3.3 Sind alle partiellen Ableitungen stetig, ist die Reihenfolge der Differenziation vertauschbar: $f_{x_i x_k}(\vec{x}) = f_{x_k x_i}(\vec{x})$.

3.4 Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen, dann ist die (m,n)-Matrix $f'(\vec{x}) = Df(\vec{x}) = (a_{ik})$ mit $a_{ik} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(\vec{x})$ die *Ableitung* (*Funktionalmatrix, Jacobi-Matrix*) von f in $\vec{x} \in D$.

3.5 Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion, dann ist der Vektor $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \big(f_{x_1}(\vec{x}), \ldots, f_{x_n}(\vec{x})\big)$ der *Gradient* von f in $\vec{x} \in D$.
Der Gradient zeigt jeweils in die Richtung des "stärksten Anstiegs" von f im Punkt $\vec{x}$.

3.6 $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei in $\vec{a} \in D$ partiell differenzierbar. Hat f in $\vec{a}$ ein Extremum, so ist $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

3.7 $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei zweimal partiell differenzierbar. Die (n,n)-Matrix $H(\vec{x}) = \big(f_{x_i x_k}(\vec{x})\big)$ der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ist die *Hesse-Matrix* von f in $\vec{x} \in D$.

3.8 Eine symmetrische Matrix ist *positiv definit*/*negativ definit*/*positiv semidefinit*/*negativ semidefinit*, wenn alle Eigenwerte $> 0 \,/ < 0 \,/ \geq 0 \,/ \leq 0$ sind. Sie ist *indefinit*, wenn sie positive und negative Eigenwerte hat.

3.9 $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei in $\vec{a}$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. In $\vec{a}$ sei $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$.
f hat in $\vec{a}$ ein Maximum / Minimum / kein Extremum, wenn $H(\vec{a})$ negativ definit/positiv definit/indefinit ist.

3.10 Wenn es ein Extremum von $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, unter der Nebenbedingung $g(\vec{a}) = 0$ mit $\operatorname{grad} g(\vec{a}) \neq \vec{0}$ in $\vec{a} \in D$ gibt, dann gilt $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(\vec{a})$ und $g(\vec{a}) = 0$.

3.11 $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ $\quad g(h(x))' = g'(h(x))h'(x)$

$f(x) =$	c	$ax+b$	x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln x - x$	$\arctan x$
$f'(x) =$	0	a	ax^{a-1}	x^a	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.12

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1