1. Formelblatt

1.1 Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Die *Norm* von $\vec{v}$ ist gegeben durch $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$. Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Dreiecksungleichung* $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

1.2 Das *Skalarprodukt* von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

1.3 Für den *Winkel* $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

1.4 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ also *orthogonal* (*senkrecht*) zueinander sind.

1.5 Das *Vektorprodukt* von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.
Es ist $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ und $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *kollinear* sind, d.h. “in einer Linie liegen”.

1.6 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \in \mathbb{R}$ das *Spatprodukt* von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Es gilt

(a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

(b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ gilt genau dann, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen.

(c) $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ ist das Volumen des *Spats*, der von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.

1.7 Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.Diese Vektoren bilden eine *Basis* B des $\mathbb{R}^n$ und jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist in eindeutiger Weise als Linearkombination $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$ darstellbar. $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B$ ist dann die Koordinatendarstellung bezüglich der Basis B.

1.8 Sind $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ (m, n)-Matrizen (also Matrizen mit m Zeilen und n Spalten), so ist $A + B = (a_{ik} + b_{ik})$ und $\lambda A = (\lambda a_{ik})$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.9 Ist $A = (a_{ij})$ eine (m, n)-Matrix und $B = (b_{jk})$ eine (n, p)-Matrix, so ist das *Matrixprodukt* $A \cdot B = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$. Im allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$!

1.10 Sei $A = (a_{ik})$ eine (m, n)-Matrix. Dann ist $A^T = (a_{ki})$ (Vertauschung der Zeilen und Spalten) die *transponierte* Matrix. Es gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.11 Sei E die Einheitsmatrix. Eine (n, n)-Matrix A ist *invertierbar*, wenn es eine *Inverse* A^{-1} gibt, mit $A \cdot A^{-1} = E$. Es gilt dann $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.