

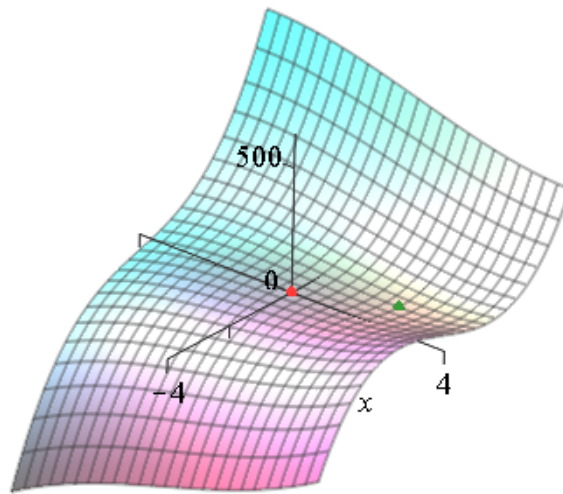


Abbildung 21: $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ mit möglichen Extrema in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ (vgl. Abbildung 21)

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= (3x^2 - 12y, -12x + 24y^2) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12y &= 0 & (9) \\ \text{und} \quad -12x + 24y^2 &= 0 & (10) \end{aligned}$$

Dies ist zwar ein Gleichungssystem, es ist aber offensichtlich nicht linear. Unsere üblichen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme können wir also nicht verwenden.

Gleichung (9) ergibt

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad (11)$$

und damit erhalten wir aus Gleichung (10)

$$\begin{aligned} -12x + \frac{3}{2}x^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x \left(-12 + \frac{3}{2}x^3 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2}x^3 &= 12 \\ \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (11) ist

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = 2 &\Rightarrow y = 1, \end{aligned}$$

also können mögliche lokale Extrema in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und in $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.

Um zu entscheiden, ob es dort tatsächlich Extremwerte gibt, müssen wir die Definitheit der Hesse-Matrix prüfen. Es ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det(H_f(0,0) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -12 \\ -12 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 12.$$

$H_f(0,0)$ hat also sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, ist also indefinit und somit gibt es an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Extremum.

Im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(H_f(2,1) - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} 12 - \lambda & -12 \\ -12 & 48 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (12 - \lambda)(48 - \lambda) - 144 \\ &= \lambda^2 - 60\lambda + 432 = 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda &= 30 \pm \sqrt{468} \approx \begin{cases} 51.63 & > 0 \\ 8.36 & > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$H_f(2,1)$ ist demnach positiv definit, wir haben in $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ also ein Minimum.

3.5 Extrema mit Nebenbedingungen

Betrachten wir folgendes Problem:

Welche Maße muss eine Dose haben, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Die Oberfläche einer Dose (Zylinder) der Höhe h und mit Radius r ist

$$\underbrace{2\pi r}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} + 2 \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{Fläche der Ober-/Unterseite}}.$$

Wir müssen also nach einem Minimum von $F(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$ suchen:

$$\text{grad } F(r,h) = (2\pi h + 4\pi r, 2\pi r) = \vec{0}$$

also

$$2\pi h + 4\pi r = 0 \quad \text{und} \quad 2\pi r = 0.$$

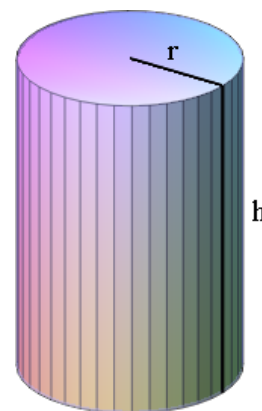
Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $r = 0$ und wenn wir dies in die erste Gleichung einsetzen, erhalten wir $h = 0$. Ein mögliches Extremum des Materialverbrauchs haben wir also bei einer Dose mit Höhe und Radius 0. Wie man das bei mathematischen Resultaten erwarten kann, ist dieses Ergebnis natürlich völlig richtig — es ist aber nicht wirklich nützlich.

Sinnvoll wird unsere Überlegung erst, wenn wir zusätzlich verlangen, dass die Dose ein gegebenes Volumen haben soll:

$$V(r,h) = \pi r^2 \cdot h = C.$$

Dies ist eine Extremwertaufgabe mit einer *Nebenbedingung*:

Wann ist die Oberfläche $F(r,h)$ minimal unter der Nebenbedingung, dass $V(r,h) = C$?



Es gilt:

3.5.1 Satz Wenn es ein Extremum einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } g(\vec{x}) \neq \vec{0}$ gibt, dann in einem Punkt $\vec{x}$ mit

$$g(\vec{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{grad } f(\vec{x}) = \lambda \cdot \text{grad } g(\vec{x}) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.5.2 Bemerkung (1) So gut wie jede Nebenbedingung lässt sich in der Form $g(\vec{x}) = 0$ ausdrücken. Unsere obige Bedingung $V(r, h) = \pi r^2 \cdot h = C$ können wir beispielsweise in der Form $g(r, h) = V(r, h) - C = 0$ schreiben.

- (2) λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Der Wert von λ hat keine weitere Bedeutung.
- (3) Der Satz sagt nicht, wo Extrema liegen, es handelt sich nur um ein notwendiges Kriterium. Wir können aber hiermit die Stellen errechnen, an denen Extrema *möglich* sind. Ob es dort dann tatsächlich Extremwerte gibt, muss auf anderem Weg entschieden werden — in der Praxis genügt hierzu meistens die Anschauung.

3.5.3 Beispiele (1) Unser Dosen-Beispiel: Wo liegt ein mögliches Minimum von

$$F(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r, h) = V(r, h) - C = \pi r^2 \cdot h - C = 0 \quad ? \quad (12)$$

Wir müssen zuerst prüfen, ob die Voraussetzungen von Satz 3.5.1 erfüllt sind: Es gilt

$$\text{grad } g(r, h) = (2\pi r h, \pi r^2) \neq (0, 0) \quad \text{für } r \neq 0.$$

Für $r \neq 0$ können wir unseren Satz also benutzen (der Fall $r = 0$ ist auch offensichtlich uninteressant). Nach Satz 3.5.1 gilt also an der Stelle eines Extremums unter der Nebenbedingung (12)

$$\begin{aligned} & \text{und} \quad g(r, h) = 0 \\ & \text{und} \quad \text{grad } F(r, h) = \lambda \text{grad } g(r, h) \\ \Leftrightarrow & \quad \pi r^2 h - C = 0 \\ & \text{und} \quad (2\pi h + 4\pi r, 2\pi r) = \lambda (2\pi r h, \pi r^2) \\ \Leftrightarrow & \quad \pi r^2 h = C \\ & \text{und} \quad 2\pi h + 4\pi r = 2\lambda \pi r h \\ & \text{und} \quad 2\pi r = \lambda \pi r^2 \\ \Leftrightarrow & \quad \pi r^2 h = C \\ & \text{und} \quad h + 2r = \lambda r h \\ & \text{und} \quad 2 = \lambda r \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt $r = \frac{2}{\lambda}$. Setzen wir dies in die vorletzte Zeile ein, erhalten wir $h + \frac{4}{\lambda} = 2h \Leftrightarrow h = \frac{4}{\lambda}$.

Insgesamt gilt also $h = 2r$, d.h. wenn es ein Minimum gibt, dann bei Dosen, deren Höhe doppelt so groß ist wie ihr Radius.

Auch die Werte für h und r können wir berechnen: Ist C das gewünschte Volumen, dann gilt wegen $h = 2r$

$$\pi r^2 h = C \quad \Leftrightarrow \quad \pi r^2 \cdot 2r = C \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi r^3 = C \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{C}{2\pi}}.$$

Soll die Dose beispielsweise ein Volumen von $C = 500$ ml haben, so erhalten wir $r \approx 4.3$ cm und damit $h \approx 8.6$ cm.

(2) Wo liegen mögliche Extrema von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 2$?

Hier formulieren wir die Nebenbedingung in der Form $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ und es gilt

$$\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \quad \text{für} \quad (x, y) \neq \vec{0}.$$

Sei also $(x, y) \neq \vec{0}$. Laut Satz 3.5.1 erfüllen eventuelle Extremalstellen

$$\begin{aligned} & g(x, y) = 0 \\ \text{und} \quad & \text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y) \\ \Leftrightarrow & \quad x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ \text{und} \quad & (y, x) = \lambda(2x, 2y) \\ \Leftrightarrow & \quad x^2 + y^2 = 2 \\ \text{und} \quad & y = 2\lambda x \\ \text{und} \quad & x = 2\lambda y. \end{aligned}$$

Setzen wir die letzte Gleichung in die vorletzte ein, so erhalten wir

$$y = 2\lambda \cdot 2\lambda y \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

Wir können nun x und y berechnen:

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt $y = 2\lambda x \Leftrightarrow y = x$ und

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

mögliche Extrema liegen also in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda = -\frac{1}{2}$ folgt $y = 2\lambda x \Leftrightarrow y = -x$ und wie oben

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1,$$

mögliche Extrema liegen hier also in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

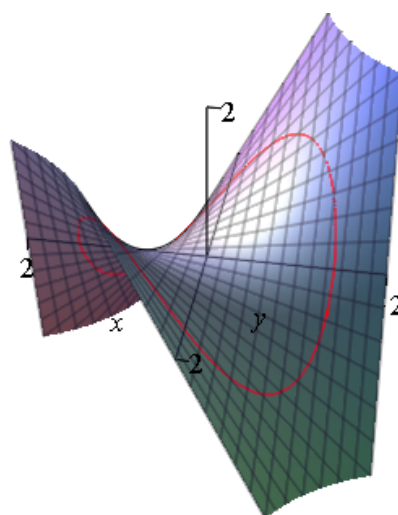


Abbildung 22: $f(x, y) = xy$ und die Punkte mit $x^2 + y^2 = 2$

Insgesamt haben wir also vier Stellen, an denen eventuell Extrema unter der Nebenbedingung existieren. Am Graphen (Abbildung 22, dort sind die Punkte, für die die Nebenbedingung gilt, mit einer roten Linie markiert) können wir erkennen, dass es Maxima in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($f(x, y) = 1$) sowie Minima in $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($f(x, y) = -1$) gibt.

3.6 Vektorfelder

Kommen wir noch einmal auf den Gradienten zurück. Nach Def. 3.4.1 ist

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{a}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{a}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{a}) \right)$$

für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$.

f ist also eine Funktion, die jedem Punkt eines mehrdimensionalen Raumes einen Skalar zuweist. Eine solche Funktion wird deshalb auch als *Skalarfeld* bezeichnet.

Analog bezeichnet man eine Funktion $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor (gleicher Dimension) zuweist, als *Vektorfeld*.

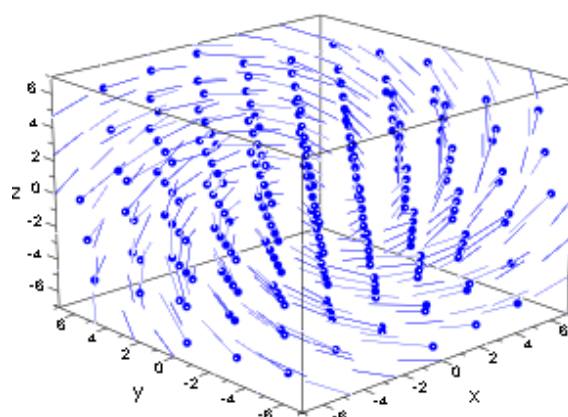


Abbildung 23: 3-dimensionales Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Ein Beispiel für ein Vektorfeld ist der Gradient einer Funktion (Gradient eines Skalarfeldes): er weist einem Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{a}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{a}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{a}) \right) \in \mathbb{R}^n$ zu. Man spricht deshalb auch von einem *Gradientenfeld*. In diesem Zusammenhang verwendet man oft eine andere Schreibweise:

Mit dem *Nabla-Operator* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ ist⁵

$$\nabla f = \text{grad } f.$$

Betrachten wir ein *partiell differenzierbares Vektorfeld*, d.h. alle Komponenten-Funktionen sind partiell differenzierbar, dann lassen sich mit dem Nabla-Operator zwei weitere Funktionen beschreiben.

Die *Divergenz* beschreibt die Tendenz eines Vektorfeldes „auseinanderzuströmen“, die *lokale Quelledichte*. Es handelt sich dabei um das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} v_n.$$

⁵Das Zeichen ∇ ähnelt der Form einer Harfe, alt-griechisch „Nabla“.

Analog bezeichnet die *Rotation* die Tendenz eines dreidimensionalen Vektorfeldes, um Punkte zu rotieren, die *lokale Wirbeldichte*. Dies ist das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld:

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \end{pmatrix} .$$

Differenzialgleichungen

4 Differenzialgleichungen und Schwingungen

4.1 Lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Bei einer *Differenzialgleichung zweiter Ordnung* tritt neben y und y' auch die zweite Ableitung y'' auf. Ähnlich wie die bereits untersuchten Differenzialgleichungen erster Ordnung haben auch Differenzialgleichungen zweiter Ordnung oft unendlich viele Lösungen, also eine *Lösungsschar*. *Partikuläre Lösungen* gibt es auch hier zu *Anfangswertproblemen*, die nun aber zwei Gleichungen benötigen: Entweder werden sie durch

$$y(a_1) = b_1 \quad \text{und} \quad y(a_2) = b_2$$

für $a_1 \neq a_2$ angegeben oder durch

$$y(a_1) = b_1 \quad \text{und} \quad y'(a_2) = b_2 .$$

Differenzialgleichungen zweiter (oder höherer) Ordnung können im allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden. Eine Ausnahme bilden dabei lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, für die es Lösungsansätze gibt:

4.1.1 Bezeichnungen Eine *lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung* hat die allgemeine Form

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) .$$

Ist $b(x) = 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich der Differenzialgleichung, dann heißt die Differenzialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Wichtig ist hier ein Begriff, den wir in ähnlicher Form bereits bei Vektoren kennen gelernt haben:

4.1.2 Definition Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ zwei Funktionen. f und g heißen *linear unabhängig*, wenn für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in D$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt werden kann.

Damit können wir nun die Lösungsschar einer homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung konstruieren:

4.1.3 Satz Zu einer homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen, auf einem gemeinsamen Intervall definierten Koeffizientenfunktionen $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$ lassen sich stets zwei linear unabhängige Lösungen $f(x)$ und $g(x)$ finden, so dass die allgemeine Lösungsschar durch

$$y(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. f und g bezeichnet man dann als *Fundamentalsystem*.

Zur Prüfung der linearen Unabhängigkeit zweier Funktionen dient folgendes Kriterium:

4.1.4 Satz Seien f und g Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung. Dann ist die *Wronski-Determinante* von f und g

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}$$

entweder gleich 0 für alle x oder ungleich 0 für alle x . Ist $W(x) \neq 0$, dann sind $f(x)$ und $g(x)$ linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem.

4.1.5 Beispiel Betrachten wir die Differenzialgleichung $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Man kann leicht nachrechnen, dass $y_1(x) = e^{3x}$ und $y_2(x) = e^{-x}$ Lösungen dieser Differenzialgleichung sind. (Wie wir diese finden, sehen wir später.) Es gilt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Da $W(x)$ entweder immer = 0 oder immer $\neq 0$ ist, genügt es, $W(x)$ an einer beliebigen Stelle zu berechnen, z.B. in $x = 0$:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0,$$

y_1 und y_2 bilden also ein Fundamentalsystem und die Lösungsschar ist daher

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Im Spezialfall, dass die Koeffizientenfunktionen $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$ konstant sind, also gar nicht von x abhängen, können wir das Fundamentalsystem, das die Differenzialgleichung löst, recht leicht angeben. (Das obige Beispiel gehört in diesen Fall, denn da ist $a_1(x) = -2$ und $a_0(x) = -3$.)

4.1.6 Satz Sei $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ eine homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $D = a_1^2 - 4a_2 a_0$ die *Diskriminante* der Differenzialgleichung und es gilt:

1. Fall: $D > 0$ Mit $\lambda_1 = -\frac{a_1 + \sqrt{D}}{2a_2}$ und $\lambda_2 = -\frac{a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{\lambda_2 x}$$

ein Fundamentalsystem.