

Funktionen mehrerer Variablen

3 Funktionen im $\mathbb{R}^n$

3.1 Bezeichnungen und Beispiele

Naturwissenschaftliche Beobachtungen werden oft mathematisch durch Funktionen beschrieben. Ein Beispiel mag das bekannte Newtonsche Gravitationsgesetz sein: Sind m_1 und m_2 zwei Massen und ist r der Abstand dieser Massen, so bezeichnet $F(m_1, m_2, r) = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ die Kraft, die zwischen diesen Massen wirkt (G ist eine geeignete Konstante). $F(m_1, m_2, r)$ ist also eine Funktion, die drei reelle Werte auf einen reellen Wert abbildet. Dies kann auch als Abbildung eines dreidimensionalen Vektor aufgefasst werden.

Solche Funktionen müssen keine reelle Zahl ergeben, das Ergebnis könnte auch ein mehrdimensionaler Vektor sein.

3.1.1 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Eine *Funktion* $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ordnet jedem Vektor $\vec{x} \in D$ einen Vektor $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ zu.

D heißt *Definitionsbereich* von f .

Die Menge $W(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m : \vec{y} = f(\vec{x}) \text{ für ein } \vec{x} \in D\}$ ist der *Wertebereich* (das *Bild*) von f .

Vor allem aus Gründen der Bequemlichkeit schreibt man beim Umgang mit Funktionen Vektoren auch als Zeilenvektoren, also z.B. (x, y) statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3.1.2 Beispiele (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$

Diese Funktion wird wegen ihres Graphen auch als *Sattelfläche* (Abbildung 12) bezeichnet.

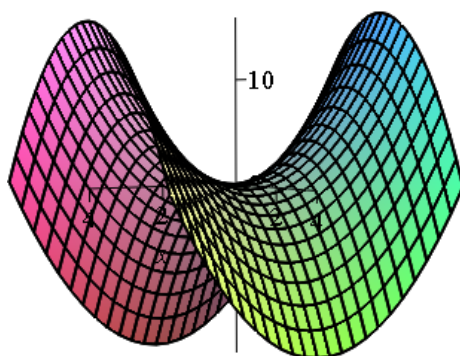


Abbildung 12: $f(x, y) = x^2 - y^2$

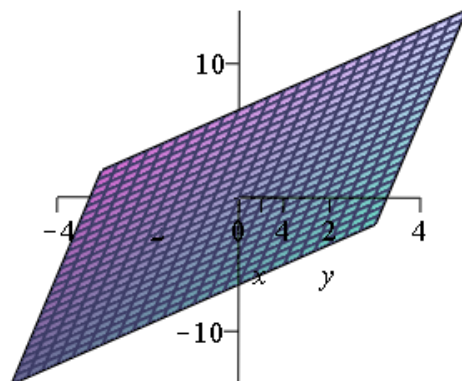


Abbildung 13: $f(x, y) = 2x + \frac{3}{2}y$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x + \frac{3}{2}y$

Der Graph einer linearen Funktion wie dieser stellt eine Ebene dar (Abbildung 13).

(3) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Diese Funktion ist offenbar für $x^2 + y^2 > 1$ nicht definiert. Innerhalb des Definitionsbereichs stellt der Graph eine Halbkugel dar (Abbildung 14).

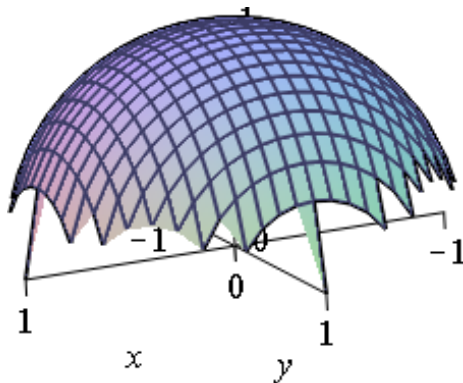


Abbildung 14: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

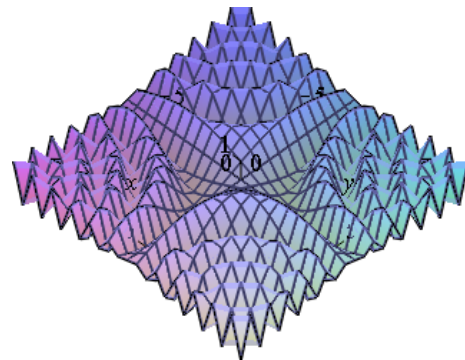


Abbildung 15: $f(x, y) = \sin(xy)$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(xy)$ (Abbildung 15)

(5) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) = (4x - 2y^2, z^2 - xy)$

Der Graph dieser Funktion ist 5-dimensional, also nicht darstellbar.

(6) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\sin t, t)$

Während die Graphen von Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ „Berg- und Tallandschaften“ ähneln, sind Graphen von Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ Kurven im Raum. Der Graph dieser Funktion ist eine schräg im Raum liegende Sinuskurve (Abbildung 16).

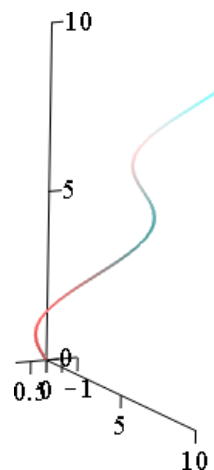


Abbildung 16: $f(t) = (\sin t, t)$

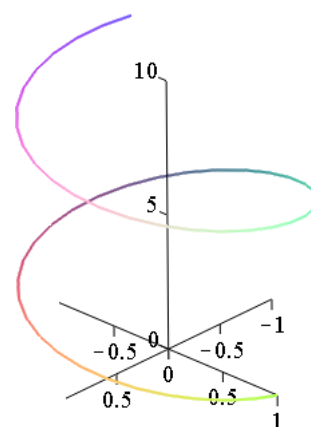


Abbildung 17: $f(t) = (\sin t, \cos t)$

(7) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\sin t, \cos t)$ Hier ist der Graph eine Schraubenlinie (Abbildung 17).

3.2 Stetigkeit

Die Stetigkeit von Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kennen wir bereits aus Teil I. Dort hatten wir zuerst Folgen betrachtet, um den Begriff der Stetigkeit definieren zu können. So gehen wir auch bei mehrdimensionalen Funktionen vor:

Seien $(x_k)_k = x_1, x_2, \dots$ und $(y_k)_k = y_1, y_2, \dots$ zwei Folgen in den reellen Zahlen.

$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots$ bildet dann eine Folge im $\mathbb{R}^2$ und dies lässt sich natürlich auch in höheren Dimensionen fortführen: Im $\mathbb{R}^n$ betrachten wir Folgen

$$(\vec{x}_k)_k = \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3n} \end{pmatrix}, \dots$$

Für $i = 1, \dots, n$ stellt also jedes $(x_{ki})_k = x_{1i}, x_{2i}, \dots$ eine Folge in $\mathbb{R}$ dar.⁴

3.2.1 Beispiel

$$(\vec{x})_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \dots$$

ist eine Folge im $\mathbb{R}^2$ mit $(x_{k1})_k = \left(\frac{1}{k}\right)_k$ und $(x_{k2})_k = \left(\frac{1}{k^2}\right)_k$.

Wenn wir eine Folge im $\mathbb{R}^n$ als n Folgen in $\mathbb{R}$ betrachten, fällt es uns leicht, die Konvergenz mehrdimensionaler Folgen zu definieren:

3.2.2 Definition Eine Folge $(\vec{x}_k)_k = \left(\begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} \right)_k$ des $\mathbb{R}^n$ ist *konvergent*, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{ki})_k$ für alle $i = 1, \dots, n$ konvergieren.

3.2.3 Beispiele (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ k^2 \end{pmatrix}_k$ konvergiert nicht: $(1 - \frac{1}{k})_k$ konvergiert zwar, aber $(k^2)_k$ ist divergent.

Nun können wir uns überlegen, wie man Stetigkeit auch bei Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren kann.

Erinnern wir uns zuerst an die Situation in den reellen Zahlen: Eine Funktion f *konvergiert* in $a \in \mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ (d.h. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$), wenn für jede Folge (a_k) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = g$.

f ist *stetig* in a , wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ganz analog definieren wir nun:

3.2.4 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ *konvergiert* in $\vec{a} \in D$ gegen $\vec{g} \in \mathbb{R}^m$, wenn für jede Folge $(\vec{a}_k)_k$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{a}_k) = \vec{g}$.

f ist *stetig* in $\vec{a}$, wenn f in $\vec{a}$ gegen $f(\vec{a})$ konvergiert, also, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{a}_k) = f(\vec{a}) \quad \text{für jede Folge } (\vec{a}_k)_k \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}.$$

⁴Auch, wenn die Schreibweise x_{ki} an Komponenten von Matrizen erinnert, handelt es sich hier um keine Matrix: $k = 1, 2, 3, \dots$ läuft in Folgen „bis ins Unendliche“.

Wie wir es schon von Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kennen, sind aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktionen wiederum stetig:

3.2.5 Satz Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ stetig, so sind auch $h(f(\vec{x}))$ und $f(\vec{x}) \pm g(\vec{x})$ stetig. Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$ und, falls $g(\vec{x}) \neq 0$, $\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ stetig.

3.2.6 Beispiele

$$f(x, y, z) = \frac{x}{z^2} - x^2 y z^3 + 2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = e^{x-y}$$

sind (für $z \neq 0$) stetig, da sich diese Funktionen aus stetigen Funktionen zusammensetzen.

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ und daher können wir den Funktionswert auch als Vektor schreiben, dessen Komponenten Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind:

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

3.2.7 Satz Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, wenn alle *Komponentenfunktionen* $f_i(\vec{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, m$ stetig sind.

3.2.8 Beispiele (1) $f(t) = (\sin t, \cos t)$ ist stetig, da $f_1(t) = \sin t$ und $f_2(t) = \cos t$ stetig sind.

(2) $f(x, y) = \left(2x^2 - y, \sqrt{y}, \frac{1}{x-y} \right)$ ist stetig für $x \neq y$ und $y \geq 0$, da $f_1(x, y) = 2x^2 - y$, $f_2(x, y) = \sqrt{y}$ und für $x \neq y$ auch $f_3(x, y) = \frac{1}{x-y}$ stetig sind. Für $x = y$ oder $y < 0$ ist die Funktion nicht definiert, also weder stetig noch unstetig.

(3)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \end{cases}$$

ist stetig für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, da sich die Funktion dort aus stetigen Funktionen zusammensetzt.

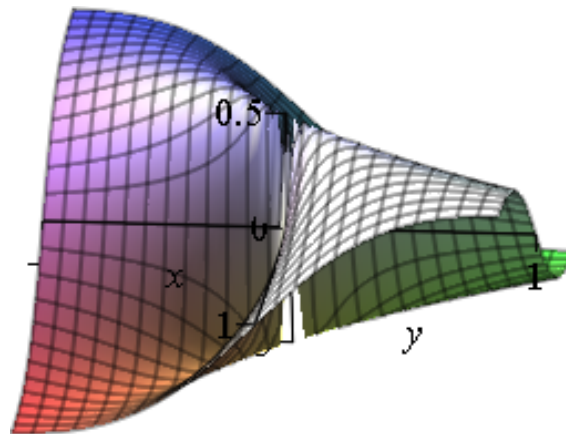
Im Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ mag man vermuten (vgl. Abbildung 18), dass die Funktion dort unstetig ist. Um dies zu zeigen, müssen wir wegen Definition 3.2.4 nachweisen, dass es eine Folge $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, für die gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) \neq f(0, 0).$$

Betrachten wir dazu $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$f(x_k, y_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0),$$

f ist also unstetig in $\vec{0}$.

Abbildung 18: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

3.3 Differenzierbarkeit

Zur Erinnerung: Die Ableitung einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x_0) &= f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{mit } h = x - x_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Analog können wir bei Funktionen mehrerer Variablen verfahren: Betrachten wir beispielsweise eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dann können wir diese Funktion sowohl nach der ersten als auch nach der zweiten Komponente von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ableiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Außer der etwas anderen Schreibweise „ $\frac{\partial}{\partial x}$ “ statt „ $\frac{d}{dx}$ “, entspricht dies gerade der eindimensionalen Differenzierbarkeit in (7).

Allgemein:

3.3.1 Definition Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in $\vec{x} \in D$ *partiell differenzierbar nach* x_k , wenn der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) = f_{x_k}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

existiert.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung erhält man durch wiederholte partielle Differenziation. Ist

f nach allen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar, dann heißt f *partiell differenzierbar* in $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

3.3.2 Beispiele (1) $f(x, y) = 2x^2 + xy - 2y$

Es ist $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = 4x + y$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = x - 2$.

Die höheren partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} f(x, y) = f_{xx}(x, y) = 4 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f(x, y) = f_{yy}(x, y) = 0\end{aligned}$$

(2) $f(x, y) = e^{x-y}$

Es folgt

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= e^{x-y} & f_y(x, y) &= -e^{x-y} \\ f_{xx}(x, y) &= e^{x-y} & f_{yx}(x, y) &= -e^{x-y} \\ f_{xy}(x, y) &= -e^{x-y} & f_{yy}(x, y) &= e^{x-y} \quad \text{usw.}\end{aligned}$$

(3) $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xyz$

Die partiellen Ableitungen (erster Ordnung) sind

$$f_x(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + yz \quad f_y(x, y, z) = 2xy + xz \quad f_z(x, y, z) = xy$$

und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y, z) &= 6x & f_{yx}(x, y, z) &= 2y + z & f_{zx}(x, y, z) &= y \\ f_{xy}(x, y, z) &= 2y + z & f_{yy}(x, y, z) &= 2x & f_{zy}(x, y, z) &= x \\ f_{xz}(x, y, z) &= y & f_{yz}(x, y, z) &= x & f_{zz}(x, y, z) &= 0.\end{aligned}$$

Unter den partiellen Ableitungen dritter Ordnung haben wir beispielsweise $f_{xxx}(x, y, z) = 6$ oder $f_{zyx}(x, y, z) = 1$ usw.

Obwohl es „eigentlich“ nicht gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge man nach den verschiedenen Komponenten partiell ableitet, fällt auf, dass das Ergebnis unabhängig von dieser Reihenfolge zu sein scheint: es ist z.B. im letzten Beispiel $f_{xyz}(x, y, z) = f_{zyx}(x, y, z) = 1$. Tatsächlich gilt

3.3.3 Satz Existieren alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung und sind diese alle stetig, dann kann die Reihenfolge der partiellen Differenziationen vertauscht werden.

Bei einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir also (wenn die Funktion partiell differenzierbar ist) n partielle Ableitungen. Wie sieht es bei Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ aus?

In dieser Situation können wir die Funktion wieder in m Komponentenfunktionen zerlegen und diese wie gehabt partiell ableiten:

3.3.4 Definition Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ist *partiell differenzierbar nach x_k* , wenn alle Komponentenfunktionen $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$ nach x_k partiell differenzierbar sind.

f heißt *partiell differenzierbar*, wenn f nach allen $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

3.3.5 Beispiel Betrachten wir $f(x, y) = (\sin x, \cos y, x - y)$.

Hier ist $f_1(x, y) = \sin x$, $f_2(x, y) = \cos y$ und $f_3(x, y) = x - y$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) &= \cos x & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) &= 0 & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y) &= -\sin y \\ \frac{\partial}{\partial x} f_3(x, y) &= 1 & \frac{\partial}{\partial y} f_3(x, y) &= -1 . \end{aligned}$$

3.3.6 Definition Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_k} f_i(\vec{x})$.

Die (m, n) -Matrix

$$f'(\vec{x}) = Df(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

ist die *Ableitung* von f . Weitere übliche Bezeichnungen sind *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix*.

3.3.7 Beispiel $f(x, y) = (\sin x, \cos y, x - y)$ (wie in Beispiel 3.3.5).

Dann ist die Ableitung von f die Matrix $f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.3.8 Bemerkung Im Fall eindimensionaler Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt die Ableitung in einem Punkt a bekanntlich gerade die Steigung der Tangenten in diesem Punkt an. Die Tangente ist eine Gerade $t(x) = A + B \cdot (x - a)$ (Geradengleichung), wobei $A = f(a)$ den Funktionswert an der Stelle a und $B = f'(a)$ die Steigung bezeichnet:

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) .$$

Im mehrdimensionalen Fall, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ist dies vergleichbar mit der *Tangentialebene* in einem Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$T(\vec{x}) = f(\vec{a}) + f'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) . \quad (8)$$

3.3.9 Beispiel Betrachten wir $f(x, y) = x^2 - y^3$ im Punkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (vgl. Abbildung 19).

f' ist hier die $(1, 2)$ -Matrix $f'(x, y) = (2x \quad -3y^2)$, also haben wir in $\vec{a}$ die Tangentialebene

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(1, -1) + f'(1, -1) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1^2 - (-1)^3 + (2 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \\ &= 2 + 2(x-1) - 3(y+1) \\ &= 2x - 3y - 3 . \end{aligned}$$