

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 1 \neq 0 \\ (-\frac{2}{1}) \cdot (1, 0, 2) = (-2, 0, -4) \\ (-\frac{3}{1}) \cdot (1, 0, 2) = (-3, 0, -6) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \quad a_{22} = 0, \text{ also 2. und 3. Zeile vertauschen}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.10 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Betrachten wir das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

mit einer (m, n) -Matrix A , also mit n Unbekannten und m Gleichungen. Um das Gleichungssystem

zu lösen, fassen wir A und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ zu einer Matrix zusammen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}$$

Als nächstes verwenden wir den Gauß-Algorithmus, um diese Matrix, soweit das natürlich möglich ist, auf „Dreiecksform“ zu bringen. Eventuell entstehen dabei Zeilen, die vollständig gleich 0 sind. Diese Zeilen streichen wir ersatzlos (m wird dann um 1 verringert).

Je nachdem, wie viele Zeilen und Spalten wir haben, erhalten wir Matrizen der Form²

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{in} & \beta_i \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \beta_m \end{pmatrix}$$

²Einträge, die durch den Gauß-Algorithmus 0 sind, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit oft weggelassen.

oder aber

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{mm} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}.$$

Die neue Matrix stellt natürlich auch ein lineares Gleichungssystem dar. Die Lösung dieses neuen Systems ist auch eine Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems!

Schauen wir uns die drei Fälle näher an:

(1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{nn}x_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist durch „rückwärts Einsetzen“ recht leicht zu lösen: aus der letzten Zeile ergibt sich

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

und dies können wir in die vorletzte Zeile einsetzen und so weiter, bis wir alle x_k ausgerechnet haben.

2.10.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Notieren wir dies als Matrix und führen den Gauß-Algorithmus durch:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= 8 \end{aligned} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt $x_3 = 2$. Setzen wir dies in die vorletzte Zeile ein, ergibt sich

$$-x_2 - 4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -8$$

und in der ersten Zeile erhalten wir

$$x_1 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -4 .$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{nn} & \beta_n \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \beta_m \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns z.B. die letzte Zeile an: Die zugehörige Gleichung lautet $0 = \beta_m$.

Da aber Zeilen, die nur aus Nullen bestehen, gestrichen wurden, muss $\beta_m \neq 0$ sein. Wir haben also einen Widerspruch; das lineare Gleichungssystem hat *keine Lösung*.

2.10.2 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Der Gauß-Algorithmus ergibt hier

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & 1 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & -1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & -29 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile besagt $0 = -2$, das Gleichungssystem ist also nicht lösbar.

(3)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \alpha_{mm} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}$$

mit dem zugehörigen linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{mm}x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist äquivalent zu

$$x_m = \beta_m - \frac{\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{mn}x_n}{\alpha_{mm}}.$$

Dieses System hat also keine eindeutige Lösung, sondern mehrere:

Für jede Wahl von $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, können wir x_m und dann durch „rückwärts Einsetzen“ $x_{m-1}, \dots, x_1$ berechnen.

2.10.3 Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Das Gauß-Verfahren liefert

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt für beliebige $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$$x_2 = x_3 + x_4 - 5$$

und daraus und aus der ersten Zeile

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ &= 2 + 2(x_3 + x_4 - 5) - x_3 + x_4 \\ &= x_3 + 3x_4 - 8. \end{aligned}$$

Wir haben hier also unendlich viele Lösungen, nämlich jeweils eine für jede beliebige Wahl von x_3 und x_4 . Beispielsweise erhalten wir für $x_3 = x_4 = 0$ die Lösung

$$x_1 = -8, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

und für $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ erhalten wir

$$x_1 = -7, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0.$$

2.11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bei vielen naturwissenschaftlichen Effekten, z.B. bei der Untersuchung von Resonanzfrequenzen, in der Quantenphysik oder der Biologie tritt folgendes Problem auf:

Sei A eine quadratische Matrix. Für welchen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{6}$$

für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?

Natürlich gilt (6) immer für $\vec{x} = \vec{0}$ (die sog. *triviale Lösung*). Da das zu einfach ist, interessieren wir uns nur für Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$:

2.11.1 Definition Sei A eine (n, n) -Matrix. Eine reelle Zahl λ , zu der ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

existiert, heißt *Eigenwert* von A . $\vec{x}$ nennt man dann den zugehörigen *Eigenvektor*.

2.11.2 Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 3$ ist also Eigenwert zu A und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ der zu A und dem Eigenwert 3 gehörige Eigenvektor.

Es ist aber auch

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist auch $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Wir sehen, dass zu einem Eigenwert einer Matrix mehrere Eigenvektoren existieren können. Tatsächlich gilt:

2.11.3 Satz Ist $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A , dann sind auch alle Vielfachen $a\vec{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Natürlich benötigen wir einen Weg, Eigenwerte und -vektoren zu finden. Es gilt

2.11.4 Satz Sei A eine quadratische Matrix. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

2.11.5 Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom hierzu ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Der p - q -Formel zufolge sind die Nullstellen dieses Polynoms

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases},$$

die Eigenwerte von A sind also 2 und -1.

Um auch die zugehörigen Eigenvektoren zu berechnen, betrachten wir Definition 2.11.1:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Da $(A - \lambda E)$ eine quadratische Matrix ist, ist dies ein homogenes, quadratisches, lineares Gleichungssystem, das wir mit den bekannten Methoden lösen können.

In unserem Beispiel lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

(1) Für $\lambda = 2$ haben wir also³

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{2}x_2$$

Wir wissen ja, dass Eigenvektoren nicht eindeutig sind, es kann uns also nicht überraschen, dass auch dieses Gleichungssystem mehrere Lösungen hat. Alle Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert 2, z.B. also $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Für den zweiten Eigenwert $\lambda = -1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad \begin{array}{l} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Alle Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind also Eigenvektoren zu $\lambda = -1$.

Besonders einfach ist die Ermittlung der Eigenwerte bei Dreiecksmatrizen. Es gilt nämlich:

2.11.6 Satz Sei $A = (a_{ik})$ eine Dreiecksmatrix. Dann sind die Einträge a_{ii} auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten die Eigenwerte von A .

³der Gauß-Algorithmus würde natürlich das gleiche Ergebniss liefern, wäre aber aufwändiger