

Ist A eine (m, n) -Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, dann ist also

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.

2.8.1 Beispiel

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ \text{und } x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

2.8.2 Bezeichnungen (1) Ist $m = n$, dann heißt das Gleichungssystem *quadratisch* (A ist dann auch quadratisch).

(2) Ist $\vec{y} = \vec{0}$, also $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, nennt man das Gleichungssystem *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

2.8.3 Beispiele (1)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist inhomogen und quadratisch.

Schauen wir uns die erste Gleichung näher an: $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = 0$ und das steht in Widerspruch zur zweiten Gleichung. Das Gleichungssystem kann also *keine Lösung* haben.

(2)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist homogen und quadratisch und hat, wie wir durch Einsetzen leicht nachrechnen können, *mehrere Lösungen*: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \dots$

Tatsächlich ist jeder Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1 = x_2$ eine Lösung des Systems.

Ein lineares Gleichungssystem muss also nicht eindeutig lösbar sein, es kann auch keine oder mehrere Lösungen geben. Bei homogenen Systemen ist eine Lösung aber offensichtlich immer zu finden:

2.8.4 Satz Ein homogenes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ hat stets die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ist also immer (eine) Lösung des Gleichungssystems.

Betrachten wir zuerst quadratische Gleichungssysteme. In diesem Fall können wir die Lösbarkeit, sogar die Eindeutigkeit der Lösung, recht leicht entscheiden:

2.8.5 Satz Sei $A\vec{x} = \vec{y}$ ein quadratisches lineares Gleichungssystem. Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det A \neq 0.$$

Das Gleichungssystem ist also genau dann eindeutig lösbar, wenn A invertierbar ist. Diese Beobachtung können wir nutzen, um die Lösung auch zu berechnen:

Sei A invertierbar, dann gilt

$$A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow E\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

Wir haben also:

2.8.6 Satz Sei A eine quadratische Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$.

2.8.7 Beispiel

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -15x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = & -10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Auf Seite 20 hatten wir diese Matrix bereits invertiert: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Es folgt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist also

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = -1.$$

2.8.8 Bemerkung Die Sätze 2.8.4 und 2.8.5 können wir natürlich kombinieren. Betrachten wir ein homogenes quadratisches Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $\det A \neq 0$. Dann ist $\vec{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung.

Ist allerdings das Gleichungssystem nicht quadratisch oder $\det A = 0$, dann ist A nicht invertierbar. Wir brauchen also andere Möglichkeiten, lineare Gleichungssysteme zu lösen.

2.9 Der Gauß-Algorithmus

Wir haben schon gesehen, dass Dreiecksmatrizen z.B. bei der Berechnung von Determinanten große Vorteile bieten. Das ist auch der Fall, wenn lineare Gleichungssysteme durch Dreiecksmatrizen beschrieben werden.

Bevor wir uns dies genauer anschauen, überlegen wir uns, dass wir jedes lineare Gleichungssystem auf diese Gestalt bringen können.

$$\text{Betrachten wir } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1. Schritt

Wenn $a_{11} = 0$, vertausche zwei Zeilen, so dass anschließend $a_{11} \neq 0$.

2. Schritt

- Addiere die mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur zweiten.
- Addiere die mit $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur dritten.
- ...
- Addiere die mit $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ multiplizierte 1. Zeile zur n -ten.

Wir erhalten eine neue Matrix. In der neuen Matrix sieht jedoch die erste Spalte schon so aus, wie wir das von einer (oberen) Dreiecksmatrix erwarten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

3. Schritt

Wiederhole das Verfahren mit der Untermatrix A_{11} statt A . Die erste Zeile und erste Spalte bleibt unverändert.

Als nächstes bleiben die ersten beiden Spalten und Zeilen unverändert und wir wiederholen das Verfahren für die verbleibende $(n-2, n-2)$ -Matrix und so weiter...

Nach genügend Wiederholungen dieser Schritte erhalten wir eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Schauen wir uns zwei Beispiele an:

2.9.1 Beispiele (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_{11} &= 1 \neq 0 \\ \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot (1, 0, 2) &= (-2, 0, -4) \\ \left(-\frac{-3}{1}\right) \cdot (1, 0, 2) &= (3, 0, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_{22} &= -1 \neq 0 \\ \left(-\frac{2}{-1}\right) \cdot (0, -1, -1) &= (0, -2, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$