

2.4.2 Bemerkung Ist A invertierbar, dann gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, was wegen der Nicht-Kommutativität des Matrixprodukts ja nicht selbstverständlich ist.

2.4.3 Beispiel Betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

also ist A invertierbar und es ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse zu A .

2.4.4 Satz Seien A, B invertierbare Matrizen. Es gilt

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$
- (2) $E^{-1} = E$
- (3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (sofern die Produkte definiert sind)
- (4) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Nachzurechnen, ob eine Matrix invers zu einer anderen ist, ist recht leicht. Wie stellt man aber fest, ob eine Matrix überhaupt eine Inverse hat und wie findet man die inverse Matrix, falls sie existiert?

Wir benötigen hierzu einige Matrixumformungen:

2.4.5 Definition Die folgenden Operationen bilden die *elementaren Zeilenoperationen*:

- (1) Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten $\lambda \neq 0$.
- (2) Vertauschung zweier Zeilen.
- (3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

2.4.6 Bemerkung Statt der elementaren Zeilenoperationen können jeweils auch entsprechende Spaltenoperationen benutzt werden. Zeilen- und Spaltenoperationen dürfen jedoch nicht „gemischt“ werden.

Mit Hilfe dieser Operationen ist es nun möglich, festzustellen, ob eine Matrix eine Inverse besitzt:

2.4.7 Satz Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix übergeführt werden kann.

2.4.8 Beispiel

$$\begin{array}{l|l} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & (-2)\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & 4\text{-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 1. \text{ und 2. Zeile vertauschen} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 2. \text{ Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & = E \end{array}$$

Man kann also $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ in die Einheitsmatrix überführen, die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist demnach invertierbar.

Dieses Verfahren kann auch benutzt werden, um die Inverse zu berechnen: Dazu werden die gleichen elementaren Zeilenoperationen, die zur Einheitsmatrix führen, auf eine Einheitsmatrix angewandt.

2.4.9 Beispiele (1) Schauen wir uns die Umformungen aus Beispiel 2.4.8 noch einmal an und wenden die elementaren Zeilenoperationen auch auf eine Einheitsmatrix an:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & (-2)\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & 4\text{-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \right. & 1. \text{ und 2. Zeile vertauschen} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right. & 2. \text{ Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right. &
 \end{array}$$

Es ist demnach $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, wie wir zur Sicherheit auch nachrechnen können:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Betrachten wir als zweites Beispiel eine $(3,3)$ -Matrix:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & 5\text{-fache 1. Zeile zu 2. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & (-2)\text{-fache 1. Zeile zu 3. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & 1\text{-fache 2. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & 3\text{-fache 3. Zeile zu 1. Zeile addieren} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. & 3. \text{ Zeile mit } (-1) \text{ multiplizieren} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. & 1. \text{ und 3. Zeile vertauschen} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right. &
 \end{array}$$

Folglich ist $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.