

3. Formelblatt

3.1 Eine Folge $(\vec{x}_k)$ mit $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ des $\mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{ki})_k$ konvergieren.

3.2 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist *stetig* in $\vec{a} \in D$, wenn für *alle* Folgen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$. $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$ stetig sind.

3.3 Sind alle partiellen Ableitungen stetig, ist die Reihenfolge der Differenziation vertauschbar: $f_{x_i x_k}(\vec{x}) = f_{x_k x_i}(\vec{x})$.

3.4 Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen, dann ist die (m, n) -Matrix $f'(\vec{x}) = Df(\vec{x}) = (a_{ik})$ mit $a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\vec{x})$ die *Ableitung* (*Funktionalmatrix*, *Jacobi-Matrix*) von f in $\vec{x} \in D$.

3.5 Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine partiell differenzierbare Funktion, dann ist der Vektor $\text{grad } f(\vec{x}) = (f_{x_1}(\vec{x}), \dots, f_{x_n}(\vec{x}))$ der *Gradient* von f in $\vec{x} \in D$. Der Gradient zeigt jeweils in die Richtung des "stärksten Anstiegs" von f im Punkt $\vec{x}$.

3.6 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei in $\vec{a} \in D$ partiell differenzierbar. Hat f in $\vec{a}$ ein Extremum, so ist $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$.

3.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei zweimal partiell differenzierbar. Die (n, n) -Matrix $H(\vec{x}) = (f_{x_i x_k}(\vec{x}))$ der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ist die *Hesse-Matrix* von f in $\vec{x} \in D$.

3.8 Eine symmetrische Matrix ist *positiv definit*/*negativ definit*/*positiv semidefinit*/*negativ semidefinit*, wenn alle Eigenwerte > 0 / < 0 / ≥ 0 / ≤ 0 sind. Sie ist *indefinit*, wenn sie positive und negative Eigenwerte hat.

3.9 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei in $\vec{a}$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. In $\vec{a}$ sei $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$. f hat in $\vec{a}$ ein Maximum / Minimum / kein Extremum, wenn $H(\vec{a})$ negativ definit/positiv definit/indefinit ist.

3.10 Wenn es ein Extremum von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, unter der Nebenbedingung $g(\vec{a}) = 0$ mit $\text{grad } g(\vec{a}) \neq \vec{0}$ in $\vec{a} \in D$ gibt, dann gilt $\text{grad } f(\vec{a}) = \lambda \cdot \text{grad } g(\vec{a})$ und $g(\vec{a}) = 0$.