

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Dr. Peter Bauer

Institut für Mathematik
Universität Frankfurt am Main

Wintersemester 2025/'26



Dieser Text ist unter einer Creative Commons 4.0-Lizenz (Namensnennung, nicht kommerziell, keine Bearbeitungen) lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



Funktionen einer Variablen

1 Zahlen

1.1 Zahlmengen

Im täglichen Gebrauch trifft man vor allem auf die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

Gelegentlich wird auch die Bezeichnung $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ benutzt.

Eine Erweiterung von $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} .$$

Diese sind “nützlich”, da z.B. eine Gleichung wie $n + 5 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{N}$ hat, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n + 5 = 3$. In $\mathbb{Z}$ gibt es eine solche Lösung: mit $n = -2$ gilt $n + 5 = 3$.

In analoger Form lässt sich dies fortsetzen: $2 \cdot a = 5$ ist auch in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, erst in den *rationalen Zahlen* (“Brüche”)

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

gibt es eine solche Lösung, nämlich $a = \frac{5}{2}$.

Es gibt auch Gleichungen, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind, z.B. hat $x^2 = 2$ keine rationale Lösung. Diese Lösungen, hier also $\sqrt{2}$, und weitere nicht-rationale Zahlen, wie z.B. die „Kreiszahl“ π , bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.¹

Immer wieder einmal werden wir nur Teile der reellen Zahlen ansprechen wollen, z.B. alle Zahlen zwischen 0 und 1. Um solche *Intervalle* zu bezeichnen, gibt es spezielle Schreibweisen:

1.1.1 Notation

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

¹Eine exakte Definition von $\mathbb{R}$ ist überraschend knifflig, wir belassen es daher bei dieser informellen Darstellung.

1.2 Komplexe Zahlen

Während die reellen Zahlen bereits eine Erweiterung der rationalen Zahlen sind, die im „täglichen Leben“ keine große Rolle spielen, wird in der Mathematik und vielen Naturwissenschaften sogar über $\mathbb{R}$ hinausgegangen.

Betrachten wir eine quadratische Gleichung wie $x^2 + 2x + 2 = 0$. Mit der aus der Schule bekannten „ p - q -Formel“ können wir versuchen, diese zu lösen:

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

Bekanntlich (in Definition 1.5.4 werden wir das noch genauer sehen) gibt es so etwas wie $\sqrt{-1}$ aber gar nicht!

Tatsächlich gibt es keine reelle Zahl x , so dass $x^2 + 2x + 2 = 0$. Andererseits möchte man gerne jede derartige Gleichung lösen können. Ein Ausweg besteht darin, die reellen Zahlen zu verlassen und $\mathbb{R}$ zu erweitern (wie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitert wurden):

1.2.1 Definition Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt der Ausdruck

$$z = x + iy$$

komplexe Zahl. i heißt *imaginäre Einheit* und es gilt

$$i^2 = -1.$$

$\operatorname{Re} z = x$ ist der *Realteil* von z und $\operatorname{Im} z = y$ ist der *Imaginärteil* von z .

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

1.2.2 Beispiele (1) $z = 1 - 2i \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -2$

(2) $z = i \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = 1$

(3) $z = 2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = 0$

1.2.3 Bemerkung Das letzte Beispiel zeigt, dass jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl ist ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Das ist deshalb wichtig, weil daher alle Resultate, die in $\mathbb{C}$ gelten, automatisch auch in $\mathbb{R}$ gültig sind. *Ich werde daher Sätze und Definitionen oft nur für $\mathbb{C}$ formulieren, sie gelten dann aber natürlich analog in $\mathbb{R}$.*

1.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir können mit diesen komplexen Zahlen rechnen, wie wir es in $\mathbb{R}$ gewohnt sind. Man behandelt i einfach wie eine Konstante und ersetzt bei Bedarf i^2 durch -1 :

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= a + c + i(b + d) \\ (a + ib) - (c + id) &= a - c + i(b - d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= ac + iad + ibc + (-1)bd \\ &= ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

1.3.1 Beispiele

$$\begin{aligned}(2+i) + (1-2i) &= 3-i \\(2+i) - (1-2i) &= 1+3i \\(2+i) \cdot (1-2i) &= 2 - (-2) + i(-4+1) = 4-3i\end{aligned}$$

Addition, Subtraktion und Multiplikation komplexer Zahlen ist also unproblematisch. Zur Division zweier komplexer Zahlen empfiehlt es sich, den Bruch geschickt zu erweitern:

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \\&= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2+i(cd-cd)} \\&= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \\&= \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Um eine Zahl also durch $c+id$ zu teilen, erweitern wir den Quotienten mit $c-id$.

1.3.2 Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{4+2i}{1+i} &= \frac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\&= \frac{6-2i}{2} \\&= 3-i\end{aligned}$$

Der Wechsel von $c+id$ zu $c-id$ hat einen Namen:

1.3.3 Definition Sei $z = x + iy$. Dann heißt

$$\bar{z} = x - iy$$

die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

1.3.4 Satz (Rechenregeln)

- (1) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- (2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (3) $\overline{\bar{z}} = z$

1.3.5 Bemerkung Die Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$ aus (1) hat natürlich immer noch keine reelle Lösung, in $\mathbb{C}$ können wir nun aber Lösungen finden:

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1 \pm i.$$

Rechnen wir dies z.B. für $z = -1 + i$ nach:

$$(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = (-1+i)(-1+i) + 2(-1+i) + 2 = 1 + i^2 - 2i - 2 + 2i + 2 = 0.$$

1.3.6 Bemerkung Ein Manko haben komplexe Zahlen: es gibt keine „größer“- oder „kleiner“-Relation zwischen ihnen! Bei zwei verschiedenen reellen Zahlen lässt sich immer sagen, welche von beiden die größere (oder kleinere) ist. Bei komplexen Zahlen ist das nicht möglich.

1.4 Die Gaußsche Zahlenebene

Die reellen Zahlen stellt man sich gerne als Gerade vor. Analog kann man sich die komplexen Zahlen als Ebene (sog. *Gaußsche Ebene*) vorstellen. Der Realteil wird dabei auf der horizontalen, der Imaginärteil auf der vertikalen Koordinatenachse (*reelle* bzw. *imaginäre Achse*) eingetragen. Jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ entspricht dann der Punkt mit den Koordinaten (x, y) .

Der Addition zweier komplexer Zahlen entspricht in dieser Vorstellung die aus der Schule bekannte „Vektoraddition“ (Abb. 1) und der Konjugation $\overline{x + iy} = x - iy$ entspricht die Spiegelung an der reellen Achse.

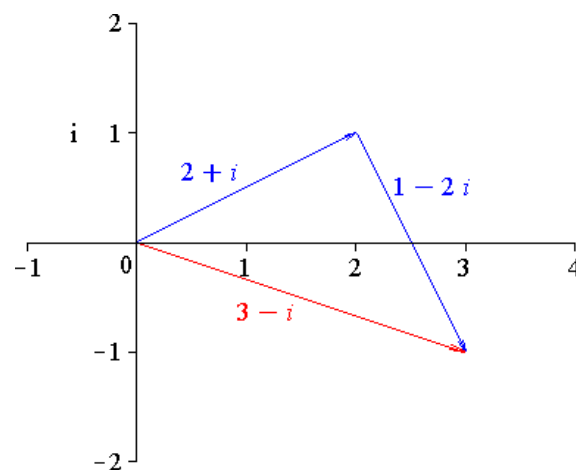


Abbildung 1: $(2 + i) + (1 - 2i) = 3 - i$

1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Zuerst definieren wir einmal genauer die *Potenz* einer (reellen oder komplexen) Zahl:

1.5.1 Definition Sei $a \in \mathbb{C}$ (oder $a \in \mathbb{R}$, vgl. Bemerkung 1.2.3) und $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$a^0 = 1 \quad , \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{für } a \neq 0 \text{ .}$$

1.5.2 Satz (Rechenregeln) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ a^n \cdot b^n &= (ab)^n \\ (a^n)^m &= a^{nm} \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist $\frac{1}{2} \cdot 2^3 = 2^{-1} \cdot 2^3 = 2^{(-1+3)} = 2^2 = 4$.

Eine recht einfache Abschätzung für die Größe von Potenzen *reeller* Zahlen (bei komplexen Werten macht die Frage nach ihrer „Größe“ keinen Sinn) gibt uns die Bernoullische Ungleichung:

1.5.3 Satz (Bernoullische Ungleichung) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \text{ .}$$

Wenn wir Potenzen kennen, können wir auch Wurzeln und Logarithmen definieren — zumindest für reelle Zahlen. (In $\mathbb{C}$ ist dieses Thema etwas komplizierter, darum kümmern wir uns später.)

1.5.4 Definition Sei $q \in \mathbb{N}$, a reell und $a \geq 0$, falls q gerade ist. Dann heißt die Lösung x der Gleichung $x^q = a$ die q -te Wurzel aus a :

$$x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

Bei geradem q gibt es mehrere Lösungen (z.B. gilt $x^2 = 1$ sowohl für $x = 1$ als auch für $x = -1$), dann verstehen wir unter der Wurzel stets die Lösung mit $x \geq 0$.

Die zweite Wurzel wird i.a. einfach als “Wurzel” bezeichnet und $\sqrt{\cdot}$ statt $\sqrt[2]{\cdot}$ geschrieben.

Wurzeln sind eigentlich nichts anderes als Potenzen mit rationalen Exponenten. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie oben, z.B. $3^2 \cdot \sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$.

1.5.5 Bemerkung Hier sehen wir nun auch, dass ein Ausdruck wie $\sqrt{-1}$ nicht definiert ist: In der Definition wird $a \geq 0$ verlangt.

Das hat einen guten Grund: es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist.

Aber auch in $\mathbb{C}$ wäre es fatal, mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu rechnen, denn dies würde sehr schnell zu unsinnigen Ergebnissen führen:

$$\begin{aligned} -1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} &= \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \\ \Rightarrow -1 &= 1 \end{aligned}$$

Eine Aussage wie „ i ist die Wurzel aus -1 “ ist also nichts als Quatsch.

Ähnlich wie die Wurzel-Definition lässt sich die Definition des Logarithmus:

1.5.6 Definition Sei $a > 0$, $b > 1$, beide reell. Dann heißt die (eindeutig bestimmte) Lösung x der Gleichung $b^x = a$ *Logarithmus von a zur Basis b* :

$$x = \log_b a.$$

1.5.7 Satz (Rechenregeln) Für $b, c > 1$ und $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_b 1 &= 0 && (\text{weil } b^0 = 1) \\ \log_b b &= 1 && (\text{weil } b^1 = b) \\ \log_b(x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b x^y &= y \cdot \log_b x \\ \log_b x &= \frac{\log_c x}{\log_c b} \end{aligned}$$

Die letzte Regel ist z.B. beim Rechnen mit Taschenrechnern nützlich, die meist nur Logarithmen zu wenigen Basen kennen (z.B. zur Basis $c=10$): Mit $x = 2$ und $b = 3$ folgt

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \approx \frac{0.301}{0.477} \approx 0.631.$$

1.6 Summen

Es gibt eine spezielle Schreibweise für Summen vieler (evtl. sogar unendlich vieler) Summanden:

1.6.1 Notation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

und allgemeiner

$$x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^n x_k$$

1.6.2 Beispiel Die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen können wir mit dieser Schreibweise darstellen als

$$\sum_{k=1}^{100} 2k - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 199 .$$

Eine spezielle Summenformel wird häufiger benötigt:

1.6.3 Satz (geometrische Summe) Für reelle oder komplexe $z \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt für die *geometrische Summe*

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} .$$

1.6.4 Beispiele (1) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.7 Der Betrag

Anschaulich bezeichnet der *Betrag* einer Zahl die Entfernung der Zahl zum Nullpunkt. Mit dem Satz von Pythagoras können wir dies mathematisch gut ausdrücken (Abbildung 2):

1.7.1 Definition $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt *Betrag* von $x + iy \in \mathbb{C}$.

1.7.2 Satz (Rechenregeln) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

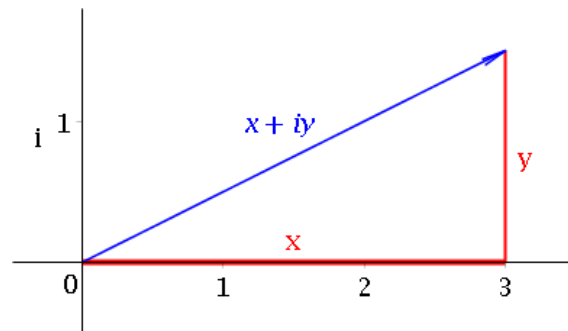
(2) $|z| = |-z|$ und $|\bar{z}| = |z|$

(3) $|zw| = |z| \cdot |w|$

(4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Dreiecksungleichung*)

(5) Speziell für den Betrag reeller Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$x \leq |x| \quad \text{und} \quad -x \leq |x|$$

Abbildung 2: $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Da reelle Zahlen den Imaginärteil Null haben, kann man für $x \in \mathbb{R}$ die obige Definition einfacher formulieren:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Leider ist diese Definition für reelle Zahlen oft unhandlich. Beispielsweise ist $|x - 2| = \sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ und mit solchen Wurzelausdrücken kann man eventuell nur schwer weiterrechnen.

Bei reellen Zahlen kann man den Betrag aber auch anders darstellen, was sich meist einfacher anwenden lässt:

1.7.3 Satz Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$

Beim Rechnen mit Beträgen reeller Zahlen ist daher meist eine Fallunterscheidung erforderlich.

1.7.4 Beispiel Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x - 2| < 1$?

1. Fall $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Hier ist $|x - 2| = x - 2$, also

$$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow x - 2 < 1 \Leftrightarrow x < 3 .$$

$|x - 2| < 1$ gilt also für $x < 3$, falls $x \geq 2$ vorausgesetzt wird:

$$2 \leq x < 3$$

2. Fall $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Hier ist $|x - 2| = -x + 2$, also

$$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -x + 2 < 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$$

$|x - 2| < 1$ gilt also für $x > 1$, falls $x < 2$ vorausgesetzt wird:

$$1 < x < 2$$

Insgesamt haben wir also $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Ganz allgemein gilt: Sei a eine reelle Zahl und $r > 0$. Dann ist für reelle x

$$|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r .$$

Natürlich können wir auch die Frage stellen, für welche *komplexen* Zahlen $z \in \mathbb{C}$ eine Ungleichung wie $|z - a| < r$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies lässt sich leicht anschaulich überlegen: $|z - a|$ ist der Abstand von z zu a , $|z - a| < r$ gilt also für alle z , deren Abstand von a kleiner als r ist — anders ausgedrückt: es handelt sich um die Zahlen, die in einem *Kreis* um a mit Radius r liegen (vgl. Abbildung 3).

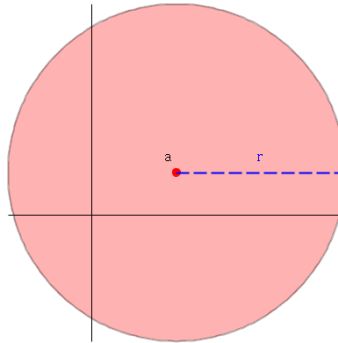


Abbildung 3: Die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < r$ bilden eine Kreisscheibe um a mit Radius r .

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt, wie man sich sehr leicht überlegt, $|x|^2 = x^2$. Für komplexe Zahlen sieht dies ein wenig anders aus:

Sei $z = x + iy$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 + i(xy - xy) - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2, \end{aligned}$$

also

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

1.8 Folgen

1.8.1 Definition Die Zahlen $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$, bei denen jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ eine reelle oder komplexe Zahl a_n zugeordnet wird, heißt *Folge*.

1.8.2 Beispiele (1) $(\frac{1}{n}) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ist eine Folge mit $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

(3) $(n + ni) = 1 + i, 2 + 2i, 3 + 3i, \dots$

(4) (a_n) mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

heißt *Fibonacci-Folge*:

$$(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

1.8.3 Definition Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle } n.$$

Eine reelle Folge heißt *nach oben (nach unten) beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$a_n \leq C \quad (a_n \geq C) \quad \text{für alle } n.$$

1.8.4 Beispiele (1) $(\frac{1}{n})$ ist z.B. durch $C = 5$ (oder $C = 2$ oder $C = 1$) beschränkt.

(2) $((-1)^n)$ ist beschränkt, da $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n \leq 1$.

(3) $(n + ni)$ ist unbeschränkt.

(4) Die Fibonacci-Folge ist nach unten beschränkt.

(5) Die Fibonacci-Folge ist unbeschränkt. (Offensichtlich ist eine reelle Folge genau dann beschränkt, wenn sie nach oben *und* unten beschränkt ist.)

1.8.5 Definition Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt...

- ... *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n .
- ... *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n .
- ... *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n .
- ... *streng monoton fallend*, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle n .

1.8.6 Beispiele (1) $(\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend:

Am leichtesten kann man die Monotonie oft überprüfen, wenn man den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ berechnet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n ,$$

(a_n) ist also streng monoton fallend.

(2) (2^n) ist streng monoton wachsend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n .$$

(3) Die Fibonacci-Folge ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend (da $a_0 = a_1 = 1$).

(4) $((-1)^n)$ ist nicht monoton.

1.9 Konvergenz

Betrachten wir die Folge $(\frac{1}{n}) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Die Folgenglieder nähern sich immer weiter dem Wert 0. Diese „Konvergenz“ wollen wir nun exakter definieren.

Zuerst eine Vorbereitung:

1.9.1 Definition Sei $\varepsilon > 0$. Eine *reelle ε -Umgebung* eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} .$$

Eine *komplexe ε -Umgebung* von $a \in \mathbb{C}$ ist analog

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\} .$$

Wie wir auf Seite 8 gesehen haben, gilt im Reellen

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

$U_\varepsilon(a)$ bezeichnet in $\mathbb{R}$ also ein Intervall.

Im Komplexen bezeichnet $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\}$ dagegen einen Kreis um a mit Radius ε .

„Konvergiert“ nun eine Folge gegen einen Wert a (im Beispiel $(\frac{1}{n})$ ist $a = 0$) und betrachtet man eine ε -Umgebung um a (mit beliebigem $\varepsilon > 0$), so liegen alle Folgenglieder, eventuell bis auf die ersten, in dieser Umgebung — egal wie klein die Umgebung ist. Bei besonders kleinen Umgebungen werden i.a. mehr Folgenglieder außerhalb der Umgebung liegen, in jedem Fall ist deren Zahl aber endlich.

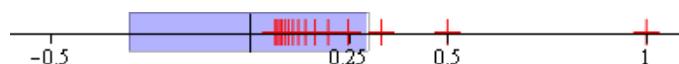


Abbildung 4: Die Folge $(\frac{1}{n})$ mit einer ε -Umgebung um 0: ab einer gewissen Zahl von Folgengliedern liegen alle innerhalb der Umgebung

Präzisieren wir dies:

1.9.2 Definition Eine Folge (a_n) heißt *konvergent gegen einen Grenzwert a* , wenn in jeder ε -Umgebung von a mit $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder a_n mit $n > n_0 \in \mathbb{N}$ liegen (also alle ab einer gewissen Stelle):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

1.9.3 Beispiel Betrachten wir wieder

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

Unsere Vermutung ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, also $a = 0$.

Sei z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Es gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \quad \text{für } n > n_0 = 10.$$

Nur die ersten 10 Folgenglieder liegen also außerhalb von $U_\varepsilon(0)$.

Verkleinern wir die Umgebung und betrachten wir $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Dann gilt (s.o.)

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \quad \text{für } n > n_0 = 100.$$

Ab dem 101sten Folgenglied liegen nun also alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(0)$.

Ganz analog haben wir für alle $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

1.9.4 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dann gilt

- (1) $(a_n \pm b_n)$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- (2) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- (3) Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, dann konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

1.9.5 Beispiele (1) $\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = 2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$

Es gilt $\frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2$, also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= 0 + 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

Da $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3) Betrachten wir die Folge (q^n) mit einem $q \in \mathbb{C}$.

Hier müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

(a) $|q| > 1$:

Ist $|q| > 1$, dann ist $|q| = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und mit der Bernoullischen Ungleichung 1.5.3 folgt

$$|q|^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Daraus folgt offenbar $|q|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ und somit auch

$$(q^n) \text{ divergiert für } |q| > 1.$$

(b) $0 < |q| < 1$:

Ist $0 < |q| < 1$, dann folgt $\frac{1}{|q|} > 1$ und es ist $\frac{1}{|q|} = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir nun

$$|q|^n = \frac{1}{(1 + d)^n} \leq \frac{1}{1 + nd} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Da $|q^n| \geq 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$ und deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{für } |q| < 1.$$

(c) $q = 0$:

In diesem Fall ist die Sache besonders einfach:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

(d) $|q| = 1$:

Für die Punkte mit $|q| = 1$ ist die Konvergenz von q^n nicht so eindeutig zu beantworten.

Für $q = 1$ ist beispielsweise $q^n = 1$ und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

Für $q = -1$ ist andererseits $q^n = (-1)^n$, die Folge ist also divergent, genau wie z.B. (i^n) oder andere Folgen (q^n) mit $|q| = 1$.

1.10 Konvergenz- und Divergenzkriterien

1.10.1 Satz Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

1.10.2 Beispiele (1) $(2^n) = 1, 4, 8, 16, \dots$ ist unbeschränkt, also divergent.

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, \dots$ ist beschränkt (denn $|(-1)^n| \leq 1$), aber auch divergent.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt: beschränkte Folgen müssen nicht konvergieren. Wir können aber dennoch ein Kriterium für Konvergenz finden:

1.10.3 Satz (Monotonieprinzip) Ist eine reelle Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent. Genauer: Ist eine reelle Folge...

- ...monoton wachsend und nach oben beschränkt,...
- ...monoton fallend und nach unten beschränkt,...

... so konvergiert sie.

Schauen wir uns ein Beispiel an, bei dem wir auch gleich eine weitere Bezeichnung kennenlernen:

1.10.4 Definition Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die *Fakultät von n* definiert als

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{für } n \geq 1$$

und $0! = 1$.

1.10.5 Beispiel Sei $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$. Ist (a_n) monoton?

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{2}, \quad \text{da } n \geq 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ und (a_n) ist demnach monoton fallend.

Offenbar ist $a_n = \frac{2^n}{n!} \geq 0$, die Folge ist also nach unten beschränkt und nach dem Monotonieprinzip folgt:

$$\left(\frac{2^n}{n!}\right) \text{ konvergiert.}$$

Das Problem bei dieser Überlegung ist: wir wissen zwar, dass die Folge konvergiert, kennen aber den Grenzwert nicht.

Leider gibt es keine allgemeine Möglichkeit, den Grenzwert einer Folge zu berechnen. Dies muss bei jeder Folge neu überlegt werden. Den Grenzwert des letzten Beispiels könnte man wie folgt bestimmen:

Es gilt

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{2}{n} \cdot a_{n-1} .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\ &= 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.11 Die Eulersche Zahl

Untersuchen wir nun eine andere Folge auf Konvergenz:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Zur Prüfung der Monotonie betrachten wir $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ mit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} \\ &= \left(\frac{(n+1) \cdot (n-1)}{n \cdot n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

Benutzen wir die Bernoullische Ungleichung, Satz 1.5.3, mit $a = -\frac{1}{n^2} \geq -1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &\geq \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist $a_n \geq a_{n-1}$, die Folge (a_n) ist monoton wachsend.

Um zu zeigen, dass die Folge konvergiert, müssen wir nun nachrechnen, dass sie nach oben beschränkt ist. Dazu brauchen wir eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln:

1.11.1 Satz (Binomischer Satz) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

wobei die *Binomialkoeffizienten* n über k gegeben sind durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & , \text{ falls } k \geq 1 \\ 1 & , \text{ falls } k = 0 \end{cases}$$

1.11.2 Beispiele

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

Wenden wir den Binomischen Satz 1.11.1 auf unsere Folge a_n an:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \end{aligned} \quad (1)$$

und betrachten wir die Summanden genauer:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k! \underbrace{n^k}_{k \text{ Faktoren}}} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} \end{aligned} \quad (2)$$

Für $k = 0$ gilt $\frac{1}{k!} = 1$ und für $1 \leq k \leq n$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdots \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$k-1 \text{ Faktoren}$

Setzen wir dies in die Ausdrücke (1) und (2) ein, erhalten wir unter Verwendung des Satzes 1.6.3 über die geometrische Summe

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Es gilt also $a_n < 3$, die Folge ist nach oben beschränkt. Da sie ja auch monoton wachsend ist, folgt nach Satz 1.10.3, dass sie konvergiert.

Gegen welchen Grenzwert (a_n) konvergiert, ist damit nicht klar, das lässt sich auch gar nicht so leicht angeben. Setzen wir einige Zahlen ein, erhalten wir die Folge

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots \approx 2, 2.25, 2.370, 2.441, \dots$$

Tatsächlich können wir den Grenzwert nicht als Bruch darstellen (er ist ähnlich wie $\sqrt{2}$ oder die Zahl π irrational).

Dieser Grenzwert ist aber eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik:

1.11.3 Definition Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet.

Eine numerische Approximation für e kann man über die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ natürlich recht leicht ausrechnen (man muss nur ein großes n einsetzen), es ist $e \approx 2.71828$.

2 Funktionen

2.1 Funktionen und Graphen

2.1.1 Definition Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Wert z aus einem *Definitionsbereich* $D(f)$ genau einen Wert $f(z)$ zuordnet.

Der *Wertebereich* $W(f)$ von f ist die Menge aller Werte die f annimmt:

$$W(f) = \{w : w = f(z) \text{ für ein } z \in D(f)\}.$$

Im *Graph* einer Funktion werden die Werte x und $f(x)$ gegeneinander aufgetragen.

Ist $D(f) \subset \mathbb{C}$ und hat die Funktion komplexe Werte, ist dieser Graph vierdimensional — wir sind also nicht in der Lage, diesen Graph zu zeichnen! Liegt sowohl Definitions- als auch Wertebereich in $\mathbb{R}$, so hat der Graph zwei Dimensionen, in diesem Fall ist der Graph eine oft sehr nützliche Veranschaulichung der dargestellten Funktion.

2.1.2 Beispiele (1) $f(z) = z^2$

f kann für alle reellen oder komplexen Zahlen berechnet werden.

Definiert man f nur auf den reellen Zahlen, also $D(f) = \mathbb{R}$, nimmt f nur nicht-negative Werte an, dann gilt also $W(f) = [0, \infty[$.

Üblicherweise schreibt man $f(x)$ wenn f auf reellen und $f(z)$, wenn f auf komplexen Zahlen betrachtet wird. Grundsätzlich ist es aber natürlich egal, wie man diese Variable nennt.

Einige Funktionswerte in $\mathbb{R}$:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$f(x) =$	4	1	0	1	4

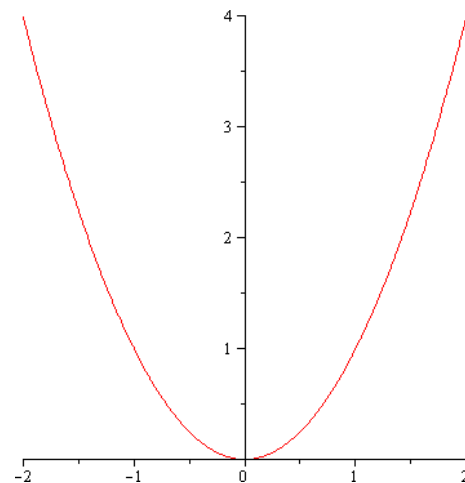


Abbildung 5: $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $D(f) = [-1, 1]$

Für $D(f) = [-1, 1]$ gilt $W(f) = [0, 1]$, für andere reelle Zahlen ist f nicht definiert.

$x =$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x) =$	-	0	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	1	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	0	-

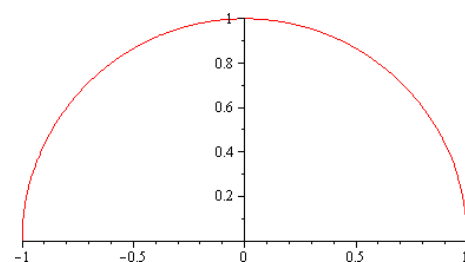


Abbildung 6: Der Graph von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1, 1]$ ist ein Halbkreis.

- (3) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ oder $f(z) = |z|$ mit $D(f) = \mathbb{C}$.

Hier ist sowohl bei der reellen als auch bei der komplexen Betragsfunktion $W(f) = [0, \infty[$. Im Komplexen ist der Graph dreidimensional.

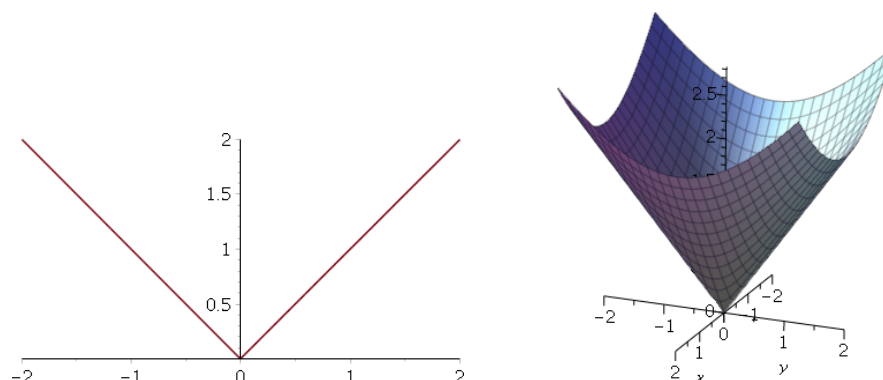


Abbildung 7: Die Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen.

2.2 Wichtige Funktionen

(1) Geraden:

Die allgemeine Darstellung einer Geraden ist die *Geradengleichung*

$$f(z) = az + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}.$$

$f(z)$ kann für alle komplexen oder reellen Zahlen berechnet werden.

Für reelle a, b und z ist die Interpretation der Werte a und b recht einfach: a ist die Steigung der Geraden, b die Verschiebung der Geraden nach oben oder unten.

Ein einfaches aber oft auftretendes Beispiel ist die *Identität* $f(z) = z$ oder die *konstante Funktion* $f(z) = c$.

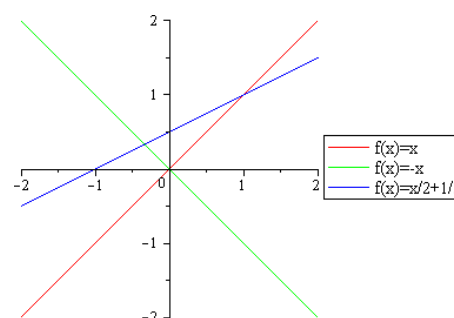


Abbildung 8: $f(x) = x, -x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

(2) Potenzen:

Potenzen sind zum Beispiel

$$f(z) = z^2, f(z) = z^3, f(z) = z^4, \dots,$$

also die Funktionen

$$f(z) = z^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0.$$

f kann für alle komplexen oder reellen Zahlen berechnet werden.

Für $f(x) = x^n$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$W(f) = \begin{cases} [0, \infty[& , \text{ falls } n \text{ gerade,} \\ \mathbb{R} & , \text{ falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

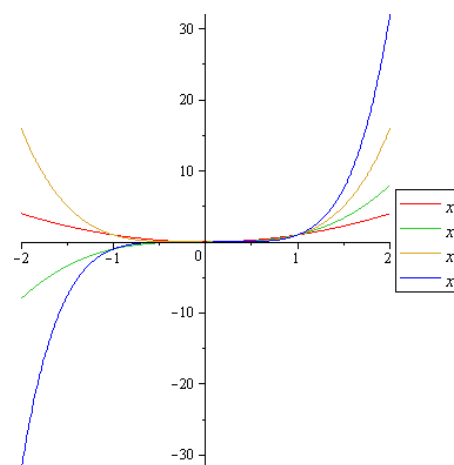
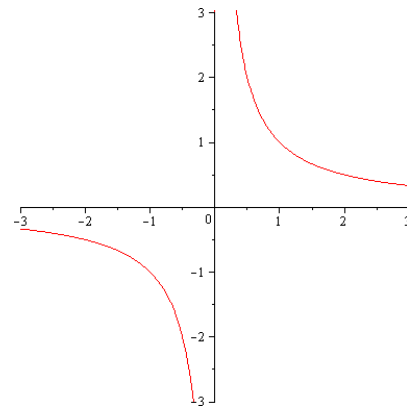


Abbildung 9: $f(x) = x^2, x^3, x^4, x^5$ ($x \in \mathbb{R}$)

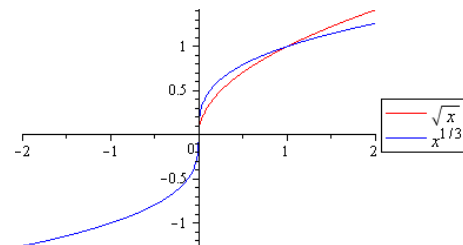
(3) Kehrwert:

$$f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

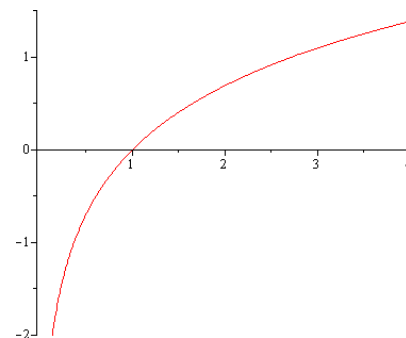
f kann für alle komplexen oder reellen Zahlen außer der Null berechnet werden und kann alle diese Werte, ebenfalls außer Null, annehmen.

Abbildung 10: $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$)**(4) Wurzeln (in $\mathbb{R}$):**

$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ kann, falls n ungerade ist, für alle reellen Zahlen definiert werden. Ist n gerade, kann f nur für nicht-negative Werte definiert werden.

Abbildung 11: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(5) Logarithmen (in $\mathbb{R}$):**

$f(x) = \log_b x$ kann für positive $x > 0$ berechnet werden. Für $D(f) =]0, \infty[$ nimmt f alle reellen Werte an: $W(f) = \mathbb{R}$.

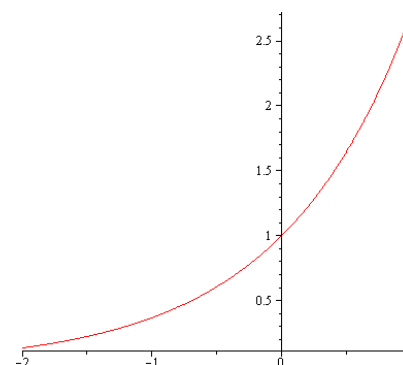
Abbildung 12: $f(x) = \log_e x$ **(6) Exponentialfunktion (in $\mathbb{R}$):**

Die *Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$f(x) = e^x,$$

wobei e die Eulersche Zahl (vgl. Def. 1.11.3) bezeichnet.

e^x ist für alle reellen Zahlen definiert, nimmt aber nur positive Werte an.

Abbildung 13: $f(x) = e^x$

Wie wir sehen werden, ist die Exponentialfunktion zur Basis der Eulerschen Zahl e eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik und der Naturwissenschaften. Entsprechend ist auch der Logarithmus zur Basis e besonders wichtig. Wir definieren deshalb eine abkürzende Schreibweise:

2.2.1 Definition Der *natürliche Logarithmus* ist der Logarithmus zur Basis e ,

$$\ln x = \log_e x .$$

2.2.2 Beispiel Exponentialfunktionen spielen vor allem bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen eine große Rolle.

Als Anfang 2020 das “Corona-Virus” SARS-CoV2 die Covid-19-Pandemie auslöste, stiegen überall auf der Welt die Fallzahlen dramatisch an. Der Begriff “exponentielles Wachstum” wurde auch von vielen nicht-wissenschaftlichen Medien verwendet. Tatsächlich beschreiben Exponentialfunktionen alle möglichen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wie die Vermehrung von Tieren oder Krankheitserregern, den Zerfall radioaktiver Isotope oder die Vermehrung von Geld auf einem Konto durch Zins- und Zinseszins.

In den Wochen nach den ersten Erkrankungen in Deutschland konnte sich der Erreger recht ungehemmt ausbreiten. Als dann die Schutzmaßnahmen griffen, wurde die Ausbreitung deutlich verlangsamt, ein exponentielles Wachstum fand in der Folge erst einmal nicht mehr statt.

Schauen wir uns daher die Situation zu Beginn der Ausbreitung in Deutschland an², z.B. die ersten drei Wochen im März 2020 (Abbildung 14). Die Funktion f soll die Anzahl der Infektionen im März beschreiben.

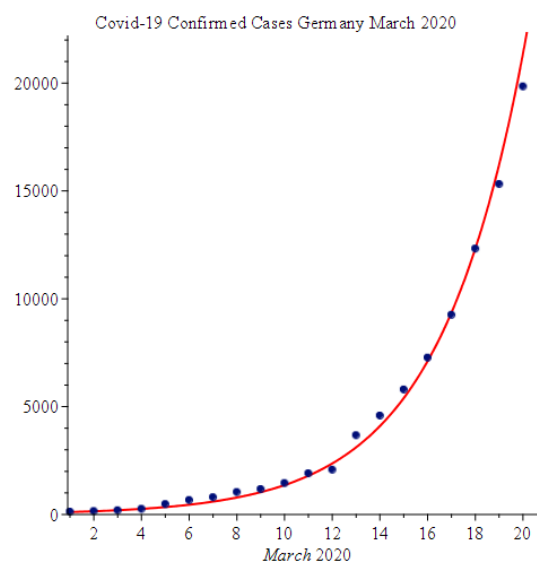


Abbildung 14: Blau: Infektionen mit SARS-CoV2 in Deutschland, 1.–21. März 2020, Rot: modellierte Exponentialfunktion

Da es an den Wochenenden regelmäßig Verzögerungen bei der Datenübermittlung durch die Gesundheitsämter gab, betrachten wir die Situation nicht am 1.3.2020 (ein Sonntag), sondern am ersten Mittwoch des Monats, dem 4.3.2020. Zu diesem Zeitpunkt gab es 262 bestätigte Fälle.

²JHU CSSE COVID-19 Data, <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19> (time series/confirmed global)

Genau zwei Wochen später, am 18.3.2020 wurden bereits 12 327 Fälle bestätigt:

$$f(4) = 262, \quad f(18) = 12327.$$

Wir beschreiben das Wachstumsverhalten durch einen *Exponentialansatz*:

$$f(t) = A \cdot e^{Bt}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} f(4) = Ae^{4B} = 262 & \implies \frac{Ae^{4B}}{262} = 1 \\ f(18) = Ae^{18B} = 12327 & \implies \frac{Ae^{18B}}{12327} = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{Ae^{4B}}{262} = \frac{Ae^{18B}}{12327} & \iff \frac{12327}{262} = \frac{Ae^{18B}}{Ae^{4B}} = e^{14B} \\ & \iff 14B = \ln \frac{12327}{262} \\ & \iff B = \frac{1}{14} \ln \frac{12327}{262} \approx 0.275 \end{aligned}$$

Hieraus können wir A leicht berechnen: Aus Gleichung (3) folgt

$$A = \frac{262}{e^{4B}} \approx 87.182$$

Insgesamt ist daher (Abbildung 14)

$$f(t) \approx 87.182 e^{0.275 t}.$$

Bei solchen Wachstumsprozessen (analog bei Zerfallsprozessen) betrachtet man gerne die *Verdoppeltungszeit* (bei Zerfallsprozessen die *Halbwertszeit*), in der sich die Probe verdoppelt (oder eben halbiert): Für welches t_D ist $f(t + t_D) = 2 \cdot f(t)$?

$$\begin{aligned} f(t + t_D) = 2 \cdot f(t) & \iff Ae^{B(t+t_D)} = 2Ae^{Bt} \\ & \iff e^{Bt_D} = 2 \\ & \iff Bt_D = \ln 2 \end{aligned}$$

Also ist

$$t_D = \frac{\ln 2}{B} \approx 2.52,$$

d.h., alle ca. $2\frac{1}{2}$ Tage verdoppelte sich zu diesem Zeitpunkt die Zahl der Infektionen.

(7) Trigonometrische Funktionen (in $\mathbb{R}$):

Trigonometrische Funktionen wie $\sin x$ und $\cos x$ stehen üblicherweise in Zusammenhang mit Winkeln.

Während im Alltag Winkel meistens in Grad angegeben werden, werden Winkel wissenschaftlich im *Bogenmaß* gemessen. Dabei wird der Winkel als die Länge des zugehörigen Kreisbogens eines Kreises mit Radius 1 angegeben.

Da ein Kreis mit Radius 1 einen Umfang von 2π hat, entspricht dem Vollwinkel von 360° also der Winkel 2π .

0°	30°	45°	90°	180°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

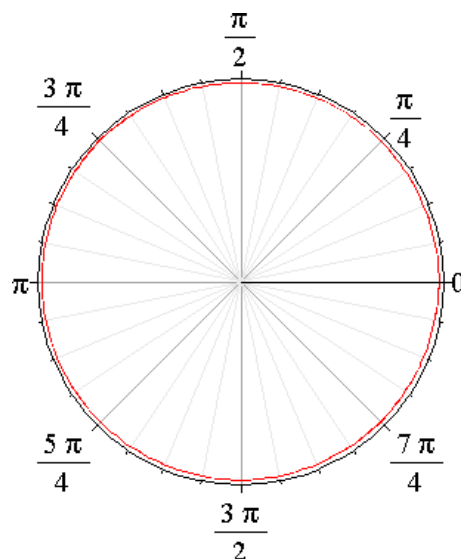
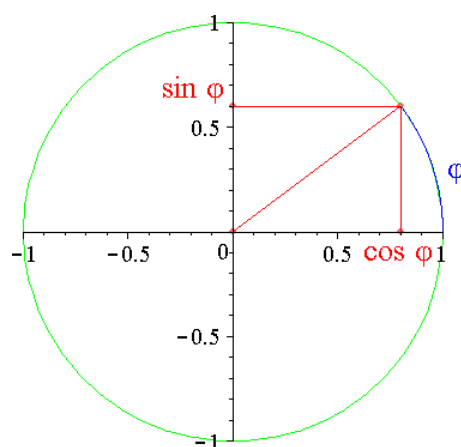


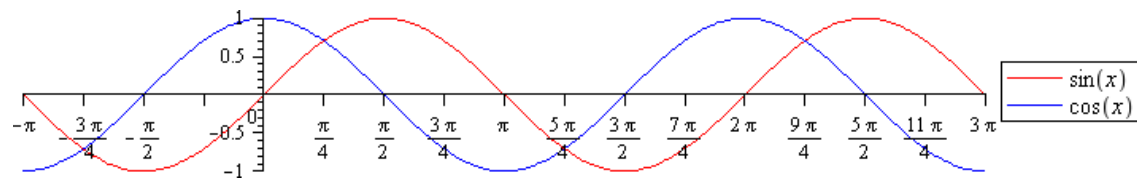
Abbildung 15: Winkel im Bogenmaß

Abbildung 16: Sinus und Cosinus eines Winkels φ

Die Sinus- und Cosinus-Funktionen sind anschaulich die Längen der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, das in einen Kreis mit Radius 1 eingeschrieben ist (Abbildung 16).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Die beiden Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ können für alle reellen Zahlen berechnet werden, nehmen aber nur Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ an.

Abbildung 17: $\sin x$ und $\cos x$ **2.2.3 Satz** (Rechenregeln)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \quad (4)$$

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x \quad (5)$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Die Gleichungen (4) und (5) besagen, dass sich die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ mit einer *Periode* der Länge 2π wiederholen. Sinus und Cosinus nennt man deshalb auch 2π -*periodisch*. Es genügt daher, die Funktionen im Intervall $[0, 2\pi]$ zu kennen.

Weitere trigonometrische Funktionen ergeben sich aus $\sin x$ und $\cos x$. Der *Tangens* ist die Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und der *Cotangens* ist

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

(jeweils definiert für Werte, bei denen die Nenner ungleich 0 sind).

2.3 Polarkoordinaten

Als Anwendung der trigonometrischen Funktionen können wir auf die Anschauung komplexer Zahlen als Punkte der Ebene zurückkommen. Diese erlaubt nämlich auch eine weitere Darstellung komplexer Zahlen:

Real- und Imaginärteil von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ stellen die „kartesischen Koordinaten“ x und y von z in der Gaußschen Ebene dar.

Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann aber auch durch den Abstand vom Nullpunkt, also durch $r = |z|$, und durch den Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ über der positiven reellen Achse bestimmt werden.

Wir erhalten die *Polarkoordinaten* r und φ .

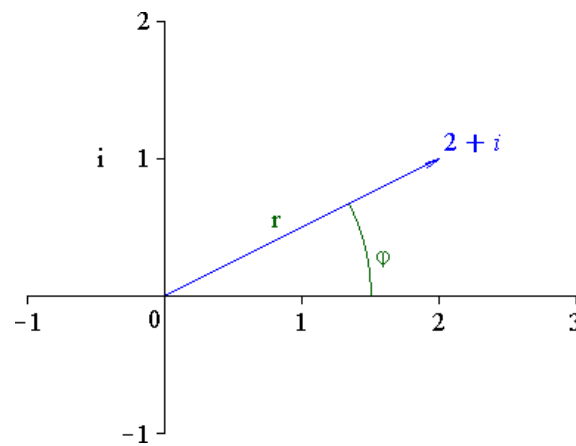


Abbildung 18: Polarkoordinaten komplexer Zahlen

Ist $z = 0$, so ist die Darstellung durch Polarkoordinaten nicht eindeutig, da der Winkel φ beliebig ist.

Sei $z \neq 0$. Für $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ gilt wegen $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sowie

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

2.3.1 Beispiele (1) $z = i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\sin \varphi = \frac{1}{1} = 1$.

Wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ist also $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(2) $z = 1 + i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, der Winkel ist im Intervall $] -\pi, \pi]$ also nicht eindeutig.

Da aber $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ gilt, ist

$$\varphi = \frac{\pi}{4} .$$

(3) Ist $r = 2$ und $\varphi = \pi$, dann haben wir

$$\operatorname{Re} z = r \cos \varphi = 2 \cos \pi = -2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = r \sin \varphi = 2 \sin \pi = 0 ,$$

also

$$z = -2 .$$

2.3.2 Bemerkung Hat $z \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinaten r und φ , dann gilt

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z \\ &= r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

2.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist nicht nur wegen ihrer Bedeutung bei Wachstumsprozessen so interessant. Überraschend mag sein, dass in $\mathbb{C}$ ein Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen existiert:

2.4.1 Satz (Eulersche Formel) Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Damit können wir e^z für $z \in \mathbb{C}$ berechnen: mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) .$$

2.4.2 Beispiel

$$e^{1+i\pi} = e^1(\underbrace{\cos \pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{=0}) = -e$$

2.4.3 Bemerkung Nach der Eulerschen Formel können wir Sinus und Cosinus als Imaginär- und Realteil von e^{iy} auffassen:

$$\operatorname{Re}(e^{iy}) = \cos y \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(e^{iy}) = \sin y$$

2.4.4 Bemerkung Aus Satz 2.4.1 können wir auch eine neue „Darstellung“ komplexer Zahlen gewinnen: Aus der Eulerschen Formel und Bemerkung 2.3.2 folgt nämlich

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} .$$

Wenn also $z = x + iy$ die Darstellung einer komplexen Zahl in „kartesischen“ Koordinaten x und y ist, ist $z = re^{i\varphi}$ die Darstellung in Polarkoordinaten r und φ .

Wir wissen bereits aus Satz 2.2.3, dass Sinus und Cosinus periodische Funktionen mit Periode 2π sind:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x , \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x . \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang ist eine Folgerung aus der Eulerschen Formel überraschend:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

und damit

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z .$$

Also:

2.4.5 Satz Die Exponentialfunktion ist periodisch und hat die Periode $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z .$$

Im Reellen erscheint uns die Exponentialfunktion alles andere als periodisch zu sein. Dies liegt daran, dass die Periode imaginär und nicht reell ist.

Die Periodizität von e^z ist der Grund, warum im Komplexen Logarithmen etwas schwieriger zu behandeln sind als im Reellen: Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Wegen der Periodizität von e^z gibt es aber mehrere Werte $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$. Für $\log w$ kommen also mehrere Werte in Frage.

Hat $z \neq 0$ die Polarkoordinaten r und φ , ist also nach Bemerkung 2.4.4 $z = re^{i\varphi}$, dann erhält man mit den üblichen Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln(r \cdot e^{i\varphi}) \\ &= \ln r + \ln(e^{i\varphi}) \\ &= \ln r + i\varphi . \end{aligned}$$

r ist reell und positiv, $\ln r$ können wir also wie gewohnt berechnen. $\ln r + i\varphi$ wird gelegentlich als *Hauptwert* von $\log z$ bezeichnet.

Weitere Werte erhält man durch die Periodizität von e^z , z.B. ist auch

$$\ln z = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln(r \cdot e^{i\varphi+2\pi i}) = \ln r + i\varphi + 2\pi i .$$

2.5 Komplexe Wurzeln

Kommen wir noch einmal auf Bemerkung 2.4.4 zurück. Wenn r und φ die Polarkoordinaten von z sind, ist danach $z = re^{i\varphi}$. Wir erhalten daraus eine Formel für die Potenzen komplexer Zahlen:

2.5.1 Satz (Formel von de Moivre) Sei k eine ganze Zahl und $z \in \mathbb{C}$ habe die Polarkoordinaten r und φ , d.h. $z = re^{i\varphi}$. Dann gilt

$$z^k = r^k \cdot e^{ik\varphi} .$$

z^k hat also die Polarkoordinaten r^k und $k\varphi$. Dies erlaubt uns eine geometrische Interpretation des Potenzierens in $\mathbb{C}$:

Potenzieren wir eine komplexe Zahl „hoch k “, dann potenziert sich der Betrag r ebenfalls zu r^k , der Winkel φ wird dagegen mit k multipliziert. Beim Quadrieren einer komplexen Zahl ($k = 2$) quadriert sich also der Betrag, der Winkel verdoppelt sich.

Das Potenzieren mit rationalen Zahlen — also die Berechnung von Wurzeln — ist in $\mathbb{C}$ leider nicht so einfach. Betrachten wir z.B.

$$z^3 = 8 .$$

In den reellen Zahlen hätte diese Gleichung die Lösung $z = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ aber gibt es mehrere Lösungen:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ (-1 + i\sqrt{3})^3 &= (1 - 2i\sqrt{3} - 3)(-1 + i\sqrt{3}) = -1 + i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 - 3i\sqrt{3} = 8 \\ (-1 - i\sqrt{3})^3 &= (1 + 2i\sqrt{3} - 3)(-1 - i\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 + 3i\sqrt{3} = 8 \end{aligned}$$

Tatsächlich gibt es in $\mathbb{C}$ immer zwei zweite Wurzeln, drei dritte Wurzeln, vier vierte Wurzeln et cetera.

Alle diese Wurzeln liegen in der Gaußschen Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt und teilen diesen Kreis in Segmente gleicher Größe (vgl. Abb. 19).

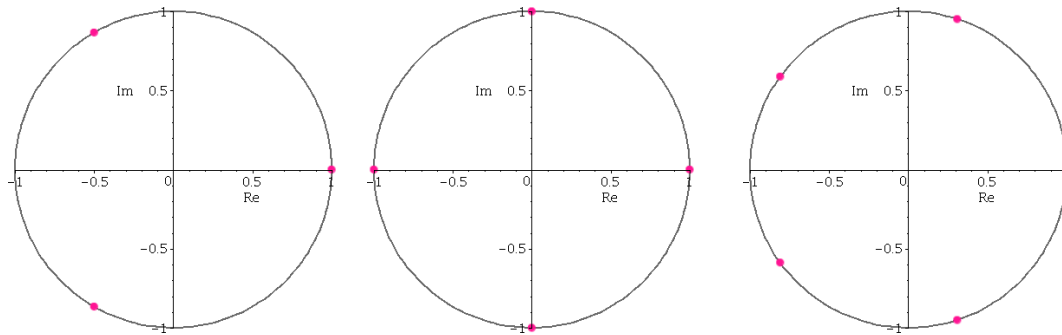


Abbildung 19: 3., 4. und 5. Wurzeln der 1, also Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 3, 4, 5$

Wir hatten beispielsweise die reelle zweite Wurzel (Definition 1.5.4) stets als die *nicht negative* Lösung der Gleichung $x^2 = a$ angesehen. Für komplexe Zahlen gibt es aber kein „positiv“ oder „negativ“. Wurzeln sind in den komplexen Zahlen daher keine Funktionen.

2.6 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte haben wir bei Folgen bereits kennengelernt. Konvergenz gibt es auch bei Funktionen. Während bei Folgen aber stets $n \rightarrow \infty$ betrachtet wird, gibt es bei Funktionen mehrere Möglichkeiten; die Konvergenz kann in jedem Punkt der reellen oder komplexen Zahlen sowie in $\pm\infty$ betrachtet werden.

2.6.1 Beispiel Der Kehrwert $f(x) = \frac{1}{x}$ nimmt für wachsende x Werte an, die sich immer weiter 0 nähern:

$x =$	1	10	100	1000
$f(x) =$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Auch, wenn x immer kleinere Werte annimmt, nähert sich $f(x)$ der Null:

$x =$	-1	-10	-100	-1000
$f(x) =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$

In der Nähe von 0, zeigt $f(x)$ dagegen kein einheitliches Verhalten:

$x =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1
$f(x) =$	-1	-10	-100	100	10	1

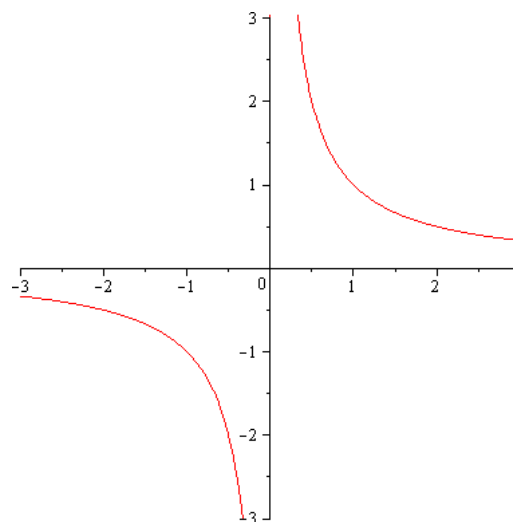


Abbildung 20: $f(x) = \frac{1}{x}$

Dieses Verhalten, Konvergenz bzw. Divergenz bei der Annäherung an eine untersuchte Stelle a , wollen wir exakter fassen. Die Idee ist, eine Folge (a_n) zu betrachten, die gegen die untersuchte Stelle a konvergiert, und dann die Konvergenz der Folge $(f(a_n))$ anzuschauen (die Konvergenz von Folgen kennen wir ja schon; vgl. Abb. 21).

2.6.2 Definition Eine Funktion f hat an der Stelle a (hier ist $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ sowie $a \in \mathbb{C}$ zugelassen) einen *Grenzwert* g , wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D(f)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g.$$

Die Bezeichnung für diesen Grenzwert einer Funktion ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

2.6.3 Bemerkung Formal müssten wir, um nachzuweisen, ob ein bestimmter Wert Grenzwert einer gegebenen Funktion ist, *alle* Folgen (a_n) betrachten, die gegen die betrachtete Stelle konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ für *alle* diese Folgen berechnen.

Wir wollen hier einen pragmatischeren Weg gehen, auch wenn dieser sehr „unmathematisch“ ist: In den allermeisten Fällen ist bereits nach kurzer Rechnung oder durch Betrachtung des Graphen „klar“, gegen welchen Grenzwert eine Funktion konvergiert. Mathematisch müsste dies natürlich exakt bewiesen werden, in der Praxis ist das aber oft gar nicht erforderlich.

2.6.4 Beispiele (1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ im Punkt $a = 1$.

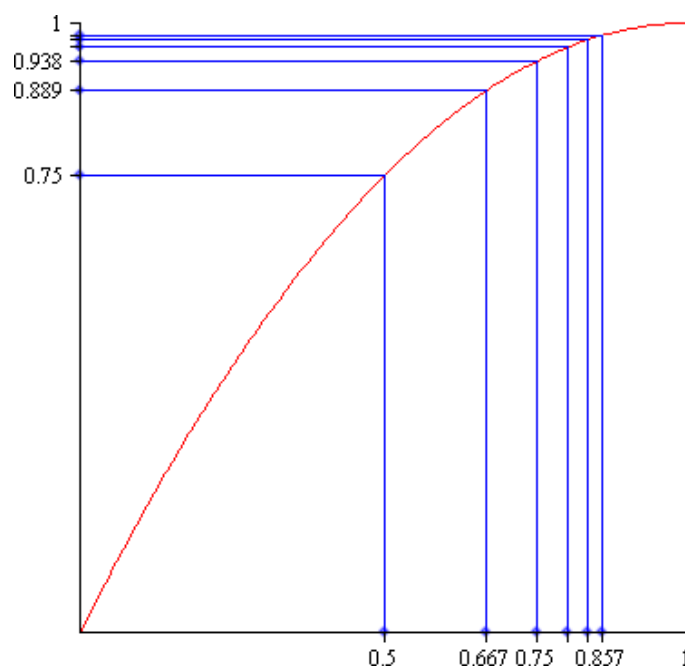


Abbildung 21: Wenn eine Folge (a_n) auf der x -Achse gegen 1 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(a_n))$ auf der y -Achse ebenfalls: Hier existiert also der Grenzwert der Funktion.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\
 &= 2 .
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir hatten ja schon in Beispiel 2.6.1 gesehen, dass wir hier unterschiedliches Konvergenzverhalten finden, Abbildung 20 zeigt dies auch deutlich.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ nähern sich die Funktionswerte der Null, es gilt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

In Null selbst ist $f(x) = \frac{1}{x}$ gar nicht definiert, es gibt aber auch keinen Wert, gegen den die Funktion dort konvergiert, $f(x)$ hat also für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert.

Wie bei der Konvergenz von Folgen gilt auch für Funktionen:

2.6.5 Satz (Rechenregeln) Seien f und g Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$. Dann gilt:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, sofern $g(x) \neq 0$ und $G \neq 0$

2.6.6 Beispiele (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x - x^2) = 1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1$, da $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

(2) $\lim_{z \rightarrow i} (1 + 2z - z^2) = 1 + 2i - i^2 = 2 + 2i$

2.7 Stetigkeit

Der Begriff der „Stetigkeit“ ist anschaulich ziemlich klar: Man bezeichnet eine Funktion als stetig in einem Punkt, wenn sie dort nicht „springt“, also nicht plötzlich ihre Werte verändert.

Mathematisch ausgedrückt, bedeutet dies, dass der Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gerade gleich dem Funktionswert ist:

2.7.1 Definition Eine Funktion f ist an einer Stelle $a \in D(f)$ *stetig*, wenn der Grenzwert von f an dieser Stelle existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Ist f stetig in allen Punkten einer Menge M , dann heißt f *stetig auf M* .

Ist eine Funktion in einem Punkt ihres Definitionsbereichs nicht stetig, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es den Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gar nicht, oder der Grenzwert existiert zwar, ist aber verschieden vom Funktionswert.

In den meisten Fällen ist anschaulich klar, ob eine Funktion stetig ist bzw. wo ihre Unstetigkeitsstellen liegen:

2.7.2 Beispiele (1) Die konstante Funktion $f(z) = c$, die Identität $f(z) = z$ und allgemein alle Geraden sind auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. ganz $\mathbb{C}$ stetig (vgl. Abbildung 8).

(2) $f(z) = \frac{1}{z}$

Der Kehrwert $f(z) = \frac{1}{z}$ (vgl. Abbildung 10) ist für $z \neq 0$ offenbar stetig.

Interessant ist die Stelle $z = 0$. f ist in diesem Punkt nicht definiert, kann dort also auch nicht unstetig oder stetig sein. Die Frage nach (Un-)Stetigkeit macht nur für Punkte aus dem Definitionsbereich Sinn. Man kann also nicht sagen, $f(z)$ sei unstetig in 0.

Tatsächlich hat die Kehrwertfunktion keine Unstetigkeitsstellen.

(3) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$

Diese Funktion ist auch für $z = 0$ definiert, wir können also $D(f) = \mathbb{C}$ betrachten.

Wie die Kehrwertfunktion aus Beispiel (2) ist auch diese Funktion stetig für $z \neq 0$.

In 0 ist f aber unstetig, denn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ existiert nicht, kann also nicht gleich dem Funktionswert $f(0) = 0$ sein.

Für stetige Funktionen gelten die Rechenregeln, wie wir sie auch schon für die Grenzwerte von Funktionen kennen:

2.7.3 Satz (Rechenregeln) Sind $f(z)$ und $g(z)$ stetige Funktionen, so ist auch...

- $f(z) \pm g(z)$ stetig,
- $f(z) \cdot g(z)$ stetig und
- $\frac{f(z)}{g(z)}$ stetig, sofern $g(z) \neq 0$.

2.7.4 Beispiele (1) Polynome $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ sind stetig auf $D(P) = \mathbb{C}$:

Polynome sind durch Addition und Multiplikation „zusammengesetzt“ aus den stetigen Funktionen $f(z) = z$ und der konstanten Funktion $f(z) = c$ und sind daher stetig.

Insbesondere sind die Potenzen, also $f(z) = c$, $f(z) = z$, $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3, \dots$ stetig.

(2) *Rationale Funktionen* sind die Funktionen $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P und Q Polynome sind. Es gilt $D(R) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

Rationale Funktionen sind ebenfalls stetig, da sie sich aus (stetigen) Polynomen durch Division ergeben. Die „kritischen“ Stellen, in denen der Nenner 0 wird, liegen nicht im Definitionsbereich, dort kann die Funktion also weder stetig noch unstetig sein, da es sie dort gar nicht gibt.

Insbesondere ist z.B. die Kehrwert-Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ stetig, das wissen wir aber ja bereits.

Viele der „üblichen“ Funktionen wie Polynome oder irrationale Funktionen sind also stetig. Ebenfalls stetig sind:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^z, \quad \ln z, \quad |z|$$

Außerdem gilt

2.7.5 Satz Seien f und g stetige Funktionen mit $W(g) \subset D(f)$. Dann ist auch die *verkettete* Funktion $f(g(z))$ stetig.

2.7.6 Beispiel $\cos \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $W\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\cos$ ist stetig mit $D(\cos) = \mathbb{R}$, also ist $\cos \frac{1}{x}$ stetig.

2.8 Umkehrfunktionen

2.8.1 Definition Sei f eine Funktion. Eine Funktion f^{-1} heißt *Umkehrfunktion*, wenn $f^{-1}(w) = z$ für $w = f(z)$.

f^{-1} darf nicht mit $\frac{1}{f(z)} = (f(z))^{-1}$ verwechselt werden. Man verwendet hier gleiche Bezeichnungen für unterschiedliche Dinge.

2.8.2 Satz (Eigenschaften) Für eine Funktion f und die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} gilt

- $D(f^{-1}) = W(f)$
- $f(f^{-1}(w)) = w$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f^{-1}(f(z)) = z$

Der Graph der Umkehrfunktion entspricht für reelle Funktionen mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ der Spiegelung des ursprünglichen Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden.

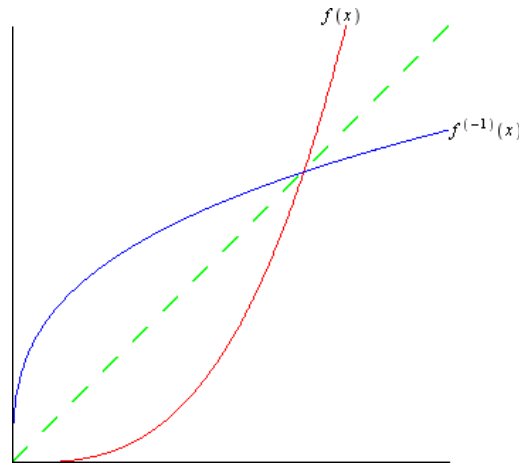


Abbildung 22: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

2.8.3 Beispiele (1) $f(z) = 2z$ mit $D(f) = \mathbb{C}$

Da $w = 2z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}w$, gilt $f^{-1}(w) = \frac{1}{2}w$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Der Kehrwert ist seine eigene Umkehrfunktion, also $f^{-1}(w) = \frac{1}{w}$, denn $w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$.

(3) $f(x) = x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$

Es gilt $f(2) = 4$, aber auch $f(-2) = 4$, derselbe Wert (hier 4) wird mehrfach angenommen. Es ist also unmöglich, x -Werte eindeutig y -Werten zuzuordnen. Daher können wir z.B. $f^{-1}(4)$ nicht berechnen, es könnte sowohl -2 als auch 2 sein.

Das letzte Beispiel zeigt, dass eine Umkehrfunktion nicht immer existiert. Um eine Umkehrfunktion zu haben, darf jeder y -Wert nur einmal angenommen werden.

Um wenigstens bei reellen Funktionen genau zu sagen, wann es eine Umkehrfunktion gibt, benötigen wir zuerst eine neue Definition (analog zur Monotonie von Folgen):

2.8.4 Definition f sei eine Funktion mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ und sei $x_1 < x_2$. f ist...

- *monoton wachsend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *monoton fallend*, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- *streng monoton wachsend*, wenn $f(x_1) < f(x_2)$,
- *streng monoton fallend*, wenn $f(x_1) > f(x_2)$,

Hiermit können wir ein Kriterium für die Existenz von Umkehrfunktionen angeben:

2.8.5 Satz Sei $y = f(x)$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf dem Intervall $[a, b]$. Dann existiert die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$.

Sie ist stetig und streng monoton wachsend, wenn f streng monoton wächst bzw. streng monoton fallend, wenn f streng monoton fällt.

2.8.6 Beispiele (1) $f(x) = \sin x$

f ist zwar stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht monoton (vgl. Abbildung 7), scheinbar können wir den obigen Satz also gar nicht anwenden. Wir können die Funktion aber streng monoton „machen“, indem wir ihren Definitionsbereich auf ein Intervall einschränken, in dem sie dies ist.

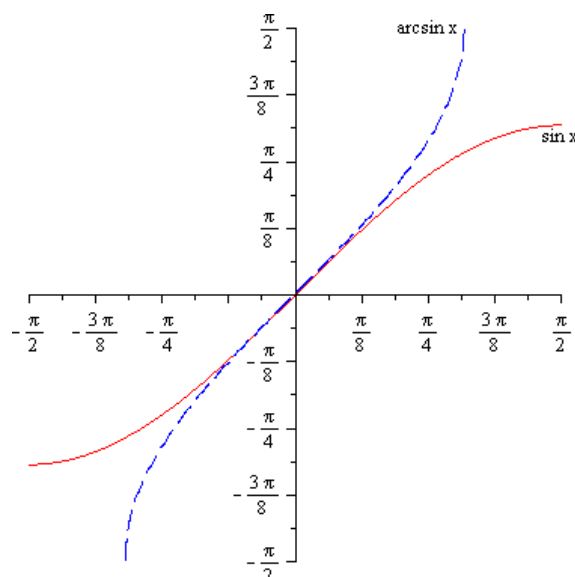


Abbildung 23: $\sin x$ und $\arcsin x$

Betrachten wir also $f(x) = \sin x$ mit $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Auf $D(f)$ ist f streng monoton wachsend, es gibt nach Satz 2.8.5 also eine (ebenfalls streng monoton wachsende) Umkehrfunktion für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, den *Arcus Sinus* (Abb.23):

$$y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin^{-1} y = \arcsin y .$$

Da $W(\sin) = [-1, 1]$ und wir hier $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ betrachten, gilt

$$D(\arcsin) = [-1, 1]$$

$$W(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $f(x) = \cos x$

Analog zum Sinus behandeln wir den Cosinus: $\cos x$ ist stetig und streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Also existiert eine streng monoton fallende Umkehrfunktion, der *Arcus Cosinus* (Abb. 24):

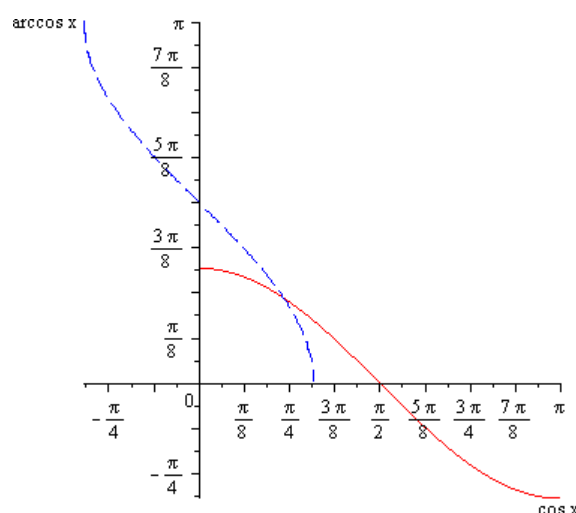
Für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$y = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos^{-1} y = \arccos y$$

mit

$$D(\arccos) = [-1, 1]$$

$$W(\arccos) = [0, \pi]$$

Abbildung 24: $\cos x$ und $\arccos x$ (3) $f(x) = x^2$

Oben hatten wir bereits gesehen, dass $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion haben kann. Unsere Methode, den Definitionsbereich geeignet einzuschränken, funktioniert aber auch hier.

Auf $D(f) = [0, \infty[$ ist f streng monoton wachsend und stetig, es gibt also eine Umkehrfunktion, die uns auch schon bekannt ist:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

(4) $f(x) = e^x$

Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{R}$ auch ohne Einschränkung ihres Definitionsbereichs streng monoton. Die Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus:

$$f^{-1}(x) = \ln x.$$

2.9 Logarithmische Skalen

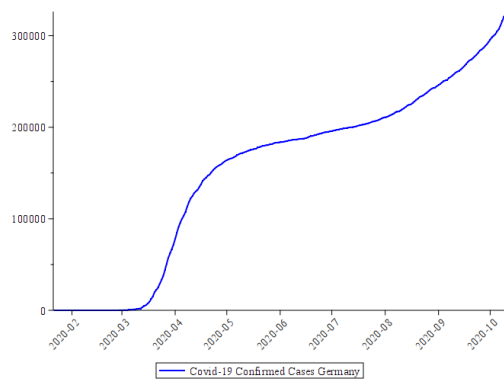
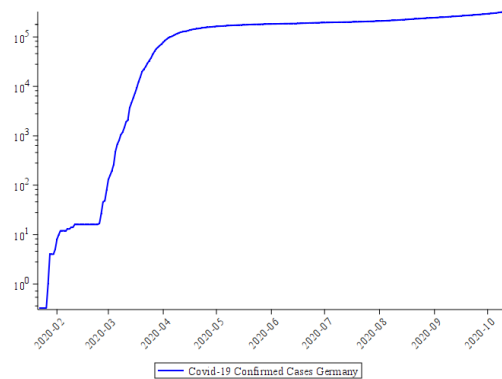
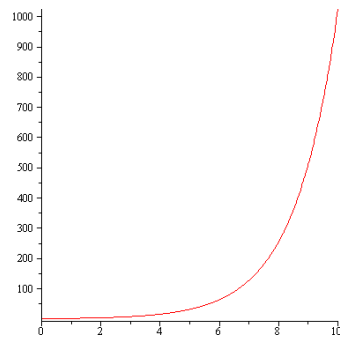
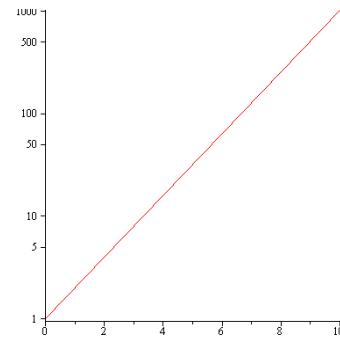
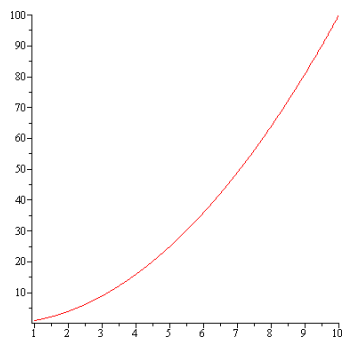
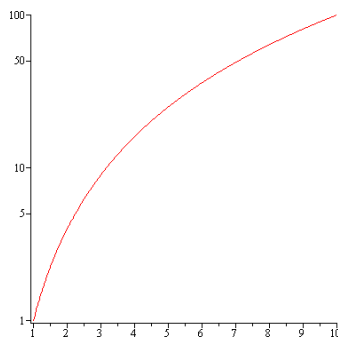
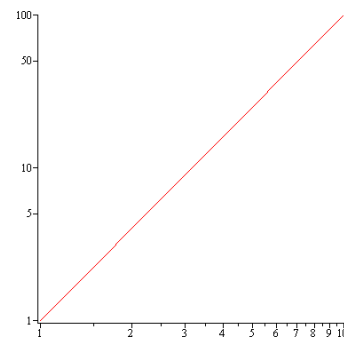
Kommen wir noch einmal auf die Entwicklung der Covid19-Fallzahlen im Jahr 2020 aus Abschnitt 2.2.2 zurück.

Abbildungen 25 und 26 stellen beide den Verlauf der Covid-19-Pandemie in Deutschland von Februar bis Oktober 2020 dar. Während in der linken Abbildung aber gerade in den Anfangstagen der Pandemie kaum etwas zu erkennen ist, zeigt die rechte Abbildung deutlicher eine Entwicklung auch in der Anfangszeit.

Grund ist die *logarithmische Skalierung* der vertikalen Achse im rechten Bild. Der Abstand zwischen den Linien für 10 und 100 Fällen ist dabei genauso groß, wie der Abstand zwischen 100 und 1000, der zwischen 1000 und 10000 usw.

Das Besondere an dieser Darstellung: Exponentielles Verhalten zeigt sich nun als *Gerade*, wie wir in den Abbildungen 27 und 28 am Beispiel von $f(x) = 2^x$ sehen können.

In Abbildung 26 ist das gut z.B. in den ersten März-Wochen zu erkennen: die Kurve stellt dort näherungsweise eine Gerade dar. In den späteren Tagen der Entwicklung krümmt sich die Kurve dagegen nach rechts — ein Zeichen, dass das Wachstum nicht mehr exponentiell fortschreitet.

Abbildung 25: Covid-19-Fallzahlen mit linearer y -SkalaAbbildung 26: Covid-19-Fallzahlen mit logarithmischer y -SkalaAbbildung 27: $f(x) = 2^x$ mit linearer y -SkalaAbbildung 28: $f(x) = 2^x$ mit logarithmischer y -SkalaAbbildung 29:
 $f(x) = x^2$ mit linearen SkalenAbbildung 30:
 $f(x) = x^2$ mit logarithmischer y -SkalaAbbildung 31:
 $f(x) = x^2$ mit doppeltlogarithmischer Skalierung (logarithmische x - und y -Achse)

Betrachten wir nun statt der Exponentialfunktion eine Potenz, z.B. $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion wächst langsamer als eine Exponentialfunktion, in logarithmischer Darstellung ist der Graph also nach unten gekrümmt (Abbildung 30). Verwenden wir aber zusätzlich auch auf der horizontalen Achse eine logarithmische Skala, erhalten wir eine Gerade (Abbildung 31). Eine solche Darstellung heißt *doppeltlogarithmisch*.

In der Praxis ist der Eintrag von (Mess-)Werten in logarithmische oder doppeltlogarithmische

Skalen auch eine einfache Möglichkeit, zu prüfen, ob z.B. experimentelle Daten einer exponentiellen oder einer potenziellen Gesetzmäßigkeit entsprechen:

In Graphen mit linearen Skalen sind Potenzen oder Exponentialfunktionen kaum zu unterscheiden. Zeichnet man die Graphen aber mit (doppelt-)logarithmischen Skalen, ist i.a. recht leicht erkennbar, wann die Daten die Form einer Geraden annehmen. Dies hilft dann, den richtigen Ansatz für eine mathematische Modellierung zu finden, d.h. eine Funktion zu finden, die das Verhalten der beobachteten Daten beschreibt.

2.9.1 Beispiel Betrachten wir ein Experiment, in dem wir eine Größe in Abhängigkeit von einer anderen Größe messen.³ In Abbildung 32 sind die gemessenen Werte eingezeichnet. Wir können den Werten nicht entnehmen, welche Gesetzmäßigkeit vorliegt.

In logarithmischer Darstellung (Abbildung 33) sehen wir aber, dass es sich offenbar nicht um eine exponentielle Abhängigkeit handelt, da der Graph keine Gerade darstellt. Ein Exponential-Ansatz der Form $f(t) = Ae^{Bt}$ wie in Abschnitt 2.2.2 wäre also falsch gewesen.

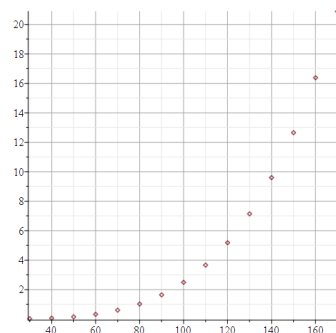


Abbildung 32: Meßwerte mit linearer Skala

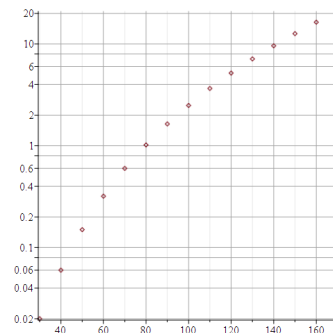


Abbildung 33: Meßwerte mit logarithmischer Skala

Versuchen wir, die Daten in doppeltlogarithmischen Skalen darzustellen, erhalten wir Abbildung 34.

Hier scheinen die gemessenen Werte eine Gerade zu bilden. Wir können also vermuten — ohne Näheres über die Gesetzmäßigkeiten des Experiments zu wissen —, dass es sich hier wohl um eine Potenz handelt und einen Ansatz der Form $f(t) = at^b$ probieren.⁴

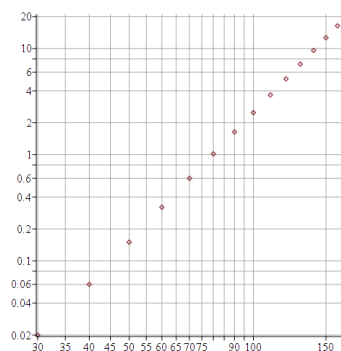


Abbildung 34: Meßwerte mit doppeltlogarithmischer Skala

³Es ist ganz egal, worum es sich im Einzelnen handelt. In diesem Beispiel benutze ich die Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers bei verschiedenen Temperaturen.

⁴Tatsächlich unterliegt das Experiment dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz*: $P = \sigma \cdot A \cdot t^4$

3 Differenzialrechnung

3.1 Differenzierbarkeit

Eine Grundidee der Differenzialrechnung ist die Frage, welche „Steigung“ eine Funktion in einem gegebenen Punkt hat.

Wir schauen uns zuerst nur reelle Funktionen an, da wir deren Graph zeichnen können. Das Prinzip können wir dann aber leicht auf komplexe Funktionen übertragen.

Betrachten wir eine Funktion $f(x)$ an einem Punkt a . Der Graph der Funktion läuft also durch den Punkt mit den Koordinaten $(a, f(a))$. Wir wollen die Steigung von f an dieser Stelle bestimmen. Da wir die Steigung von Geraden leicht angeben können (α ist ja die Steigung der Geraden $g(x) = \alpha x + \beta$), versuchen wir die *Tangente* an dem untersuchten Punkt zu bestimmen.

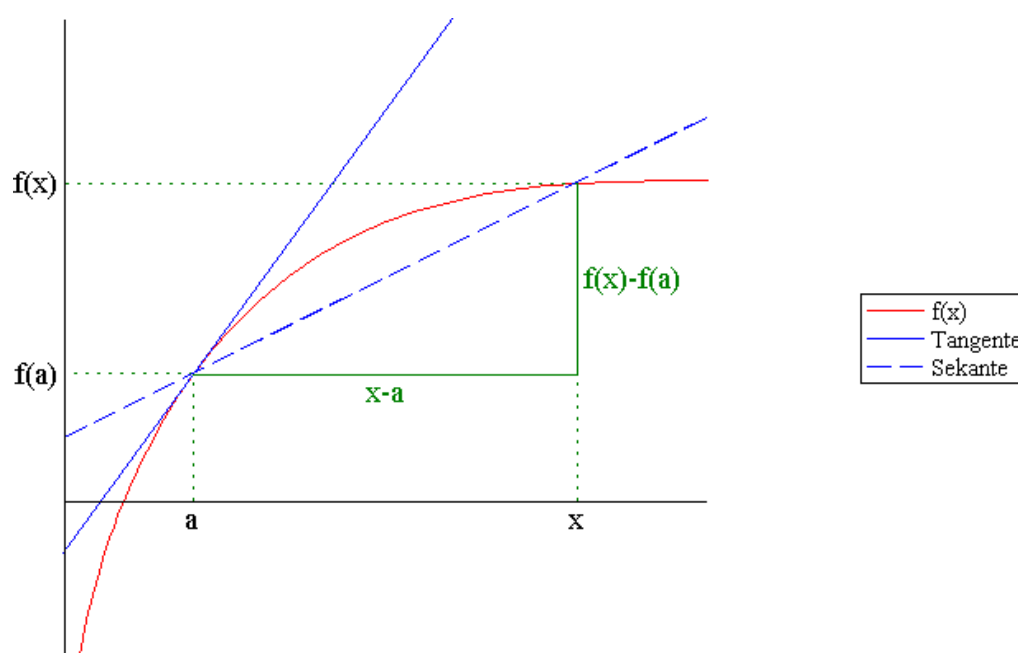


Abbildung 35: Sekante und Tangente einer Funktion

Dazu schauen wir uns zuerst eine *Sekante* an, also eine Gerade, die durch zwei Punkte des Graphen von f läuft, sagen wir durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Die Steigung einer solchen Sekanten ist (vgl. Abbildung 35)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (6)$$

Mit $x \rightarrow a$ verschiebt sich die Sekante immer mehr zur Tangente in $(a, f(a))$. Die Steigung der Tangenten ist also der Grenzwert des *Differenzenquotienten* (6) für $x \rightarrow a$.

3.1.1 Definition Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in $a \in D(f)$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

f heißt *differenzierbar auf* $M \subset D(f)$, wenn f in allen $a \in M$ differenzierbar ist.

Die Funktion f' heißt *Ableitung* von f .

3.1.2 Bemerkung (1) Der Differenzenquotient (6) wurde zwar durch Anschauung einer reellen Funktion hergeleitet, natürlich können wir die reellen Zahlen x und a aber einfach durch komplexe Zahlen ersetzen.

Definition 3.1.1 kann also in genau gleicher Weise auch für komplexe Funktionen benutzt werden - wir verwenden dann lediglich $x, a \in \mathbb{C}$ statt reeller Werte.

(2) Natürlich kann auch die Ableitung f' auf Differenzierbarkeit untersucht werden und evtl. hat auch f' eine Ableitung, die dann wiederum eine Ableitung haben kann, et cetera. Auf diese Weise entstehen die *Ableitungen höherer Ordnung*

$$f'', \quad f''', \quad f^{(4)}, \quad f^{(5)}, \dots$$

(3) Die erste Ableitung entspricht — so hatten wir die Ableitung ja konstruiert — der *Steigung* der Funktion.

Die zweite Ableitung stellt nun die Veränderung der Steigung dar, anders ausgedrückt, die *Krümmung* der Funktion.

(4) Nach Definition des Grenzwerts von Funktionen muss jeweils gezeigt werden, dass für *jede* Folge (a_n) aus $D(f)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = f'(a) .$$

Hat man also eine Folge gefunden, für die dieser Grenzwert nicht existiert, ist f nicht differenzierbar. Das gleiche gilt, falls man zwei Folgen hat, die zu unterschiedlichen Grenzwerten führen.

3.1.3 Beispiele (1) $f(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Sei a ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{\alpha z + \beta - \alpha a - \beta}{z - a} \\ &= \frac{\alpha(z - a)}{z - a} \\ &= \alpha \xrightarrow{z \rightarrow a} \alpha , \end{aligned}$$

f ist also differenzierbar in allen komplexen Zahlen (da a beliebig in $\mathbb{C}$ gewählt war) und es gilt

$$f'(z) = \alpha .$$

Bei Geraden hatten wir ja auch nichts anderes erwartet. Spezialfälle sind beispielsweise die Identität

$$f(z) = z \quad \text{mit} \quad f'(z) = 1$$

oder die konstanten Funktionen

$$f(z) = \beta \quad \text{mit} \quad f'(z) = 0 .$$

(2) $f(z) = z^2$

Sei wieder $a \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{z^2 - a^2}{z - a} \\ &= \frac{(z + a)(z - a)}{z - a} \\ &= z + a \xrightarrow{z \rightarrow a} a + a = 2a \end{aligned}$$

Im Punkt a ist f also differenzierbar mit $f'(a) = 2a$. Da a beliebig gewählt war, ist folglich $f(z) = z^2$ auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(z) = 2z$.

(3) $f(x) = |x|$ im Punkt 0 und mit $D(f) = \mathbb{R}$

Wenn wir uns den Graphen von f vorstellen, bemerken wir, dass f in 0 keine eindeutige Tangente hat — die Betragsfunktion ist dort also vermutlich nicht differenzierbar.

Betrachten wir beispielsweise die Folge $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| - |0|}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 .$$

Andererseits gilt für $a_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right| - |0|}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 .$$

Auf diesen beiden Folgen strebt der Differenzenquotient also gegen unterschiedliche Werte, kann daher nicht konvergieren. Folglich ist $f(x) = |x|$ in 0 nicht differenzierbar.

In allen anderen reellen Zahlen ist die Betragsfunktion aber sehr wohl differenzierbar; die Ableitung ist 1 für positive und -1 für negative Werte.

Sehen wir uns einen allgemeineren Fall an. f sei nun eine in a differenzierbare Funktion, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) .$$

existiert. Es gilt also

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = \lim_{z \rightarrow a} \left(\overbrace{\frac{f(z) - f(a)}{z - a}}^{f'(a)} \cdot \underbrace{(z - a)}_0 \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) .$$

Dies bedeutet aber gerade, dass f in a stetig ist. Wir haben gezeigt:

3.1.4 Satz Ist eine Funktion differenzierbar, so ist sie auch stetig.

Anders ausgedrückt: Ist eine Funktion nicht stetig, kann sie auch nicht differenzierbar sein.

Die Umkehrung dieses Satzes aber gilt nicht: Oben haben wir gesehen, dass der Betrag in 0 nicht differenzierbar ist, obwohl die Funktion dort stetig ist.

3.2 Ableitungsregeln

Für einige der Funktionen in Abschnitt 2.2 wäre der Nachweis der Differenzierbarkeit und die Berechnung der Ableitung über die Betrachtung von Folgen nicht einfach, zum Beispiel:

3.2.1 Satz Die Funktionen e^z , $\sin x$ und $\cos x$ sind für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Natürlich ist es aber nicht möglich, eine Liste aller differenzierbaren Funktionen aufzustellen, wir brauchen dazu bessere Techniken.

In der Praxis werden zur Berechnung von Ableitungen Regeln verwendet, die besagen, dass Summen, Produkte, usw. differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind und beschreiben, wie die gesuchten Ableitungen gebildet werden.

3.2.2 Satz (Summenregel) Seien f und g in a differenzierbar. Dann ist auch $f \pm g$ in a differenzierbar mit

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) .$$

3.2.3 Beispiel Sei $h(z) = z^2 + 2z + 1$. Wir können h als Summe von $f(z) = z^2$ und $g(z) = 2z + 1$ ansehen. Wir wissen aus den Beispielrechnungen 3.1.3

$$f'(z) = 2z \quad \text{und} \quad g'(z) = 2$$

und haben daher

$$h'(z) = f'(z) + g'(z) = 2z + 2 .$$

Schauen wir uns das Beispiel aus einer anderen Perspektive an: Es gilt $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. $z+1$ ist eine Gerade, die Ableitung ist $(z+1)' = 1$. Also gilt $(z+1)' \cdot (z+1)' = 1$. Wir wissen aber ja, dass $h'(z) = ((z+1)(z+1))' = 2z + 2$, offensichtlich gilt i.a. $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$. Für das Produkt von Funktionen brauchen wir eine andere Regel:

3.2.4 Satz (Produktregel) Seien f und g differenzierbar in a . Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in a mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$

3.2.5 Beispiele (1) Betrachten wir wie oben $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. Es folgt

$$h'(z) = 1 \cdot (z+1) + (z+1) \cdot 1 = 2z + 2 ,$$

wie wir es oben bereits ausgerechnet hatten.

(2) Betrachten wir den Fall, in dem eine Funktion mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ multipliziert wird. Da die Ableitung einer Konstanten Null ist, folgt:

$$(cf(z))' = 0 \cdot f(z) + c \cdot f'(z) = cf'(z) .$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten also einfach erhalten.

(3) Für $h(z) = z^3 = \underbrace{z^2}_{f(z)} \cdot \underbrace{z}_{g(z)}$ erhalten wir

$$h'(z) = 2z \cdot z + z^2 \cdot 1 = 3z^2 .$$

Allgemein kann man wie im Beispiel $f(z) = z^3$ mit der Produktregel die Ableitung von höheren Potenzen errechnen. (Für die Potenzen $z^0 = 1$ und $z^1 = z$ haben wir das ja in Beispiel 3.1.3 bereits ausgerechnet.)

Tatsächlich gilt nicht nur für Exponenten aus $\mathbb{N}_0$, sondern allgemeiner auch für reelle Exponenten:

3.2.6 Satz Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(z) = z^\alpha$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \alpha z^{\alpha-1} .$$

3.2.7 Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n$ sind nach Summenregel und Satz 3.2.6 differenzierbar mit

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1} .$$

Die Ableitung eines Polynoms ist also auch ein Polynom.

Für den Quotienten differenzierbarer Funktionen gibt es

3.2.8 Satz (Quotientenregel) Seien f und g in a differenzierbar und sei $g(a) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} .$$

3.2.9 Beispiel

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

Funktionen setzen sich nicht nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus anderen Funktionen zusammen — sie können auch verkettet (vgl. Satz 2.7.5) sein. In diesem Fall verwenden wir

3.2.10 Satz (Kettenregel) Sei $h(z)$ differenzierbar in a und sei $g(z)$ differenzierbar in $h(a)$. Dann ist die Funktion

$$f(z) = g(h(z))$$

differenzierbar in a mit

$$f'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z) .$$

g' wird hierbei oft die *äußere Ableitung*, h' die *innere Ableitung* genannt.

3.2.11 Beispiel Betrachten wir $f(x) = (\sin x)^2$. Die innere Funktion ist $h(x) = \sin x$, die äußere Funktion $g(x) = x^2$. Damit gilt

$$((\sin x)^2)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x .$$

Eine Ableitungsregel, die bei Umkehrfunktionen wie Logarithmen und den Arcus-Funktionen nützlich ist, wird der Einfachheit halber nur für reelle Funktionen formuliert:

3.2.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf einem Intervall $[a, b]$ und sei f differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$

3.2.13 Beispiel Betrachten wir $f(x) = e^x$.

f ist stetig und in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ streng monoton. Außerdem ist f überall differenzierbar mit $f'(x) = e^x \neq 0$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt und wir können ihn anwenden.

$f^{-1}(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ als Umkehrfunktion von f demnach differenzierbar und es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

3.2.14 Bemerkung Betrachten wir allgemeinere Exponentialfunktionen, also $f(z) = a^z$ für ein reelles $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$a^z = (e^{\ln a})^z = e^{z \ln a}. \quad (7)$$

(Diese Überlegung ist ein gelegentlich sehr nützlicher „Rechentrick“, um solche Ausdrücke zu handhaben.)

Nach der Kettenregel gilt nun

$$(a^z)' = (e^{z \ln a})' = e^{z \ln a} \cdot \ln a = a^z \ln a.$$

Nur für $a = e$ ist $\ln a = 1$. Der Spezialfall $(e^z)' = e^z$ ist also von allen Exponentialfunktionen diejenige Funktion mit der einfachsten Ableitung! Dies erklärt die Bedeutung der Funktion e^z im Vergleich zu Exponentialfunktionen zu anderen Basen.

Mit Satz 3.2.6 können wir Funktionen der Form x^k ableiten und der „Rechentrick“ in (7) kann benutzt werden, um Funktionen abzuleiten, bei denen x im Exponenten steht. Was aber machen wir, wenn x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt? Für solche Fälle benötigen wir unsere letzte Ableitungsregel:

3.2.15 Satz (logarithmische Differenziation) Seien f und g differenzierbar auf einem Intervall $]a, b[$ mit $f(x) > 0$. Dann ist $f(x)^{g(x)}$ differenzierbar mit

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))'.$$

3.2.16 Beispiel Berechnen wir die Ableitung von $f(x) = x^x$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned} (x^x)' &= x^x (x \ln x)' \\ &= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

3.3 Extremwerte

Dieses Thema ist wohl allen noch aus der Schulzeit bekannt — wir schauen es uns einmal genauer an.

Da in den komplexen Zahlen keine Größenvergleiche möglich sind, gibt es bei komplexwertigen Funktionen keine Extremwerte, wir betrachten daher nur reelle Funktionen.

Zur Erinnerung: Wir bezeichnen mit $U_\varepsilon(a)$ eine ε -Umgebung des Punktes a (vgl. Definition 1.9.1), d.h. die Punkte, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

3.3.1 Definition Sei f eine Funktion, die auf $]a, b[$ definiert ist. f hat in $x_0 \in]a, b[$ ein

- *lokales Minimum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$,
- *lokales Maximum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Ein Minimum oder Maximum wird auch als *Extremum* bezeichnet.

Wir sprechen also von einem lokalen Maximum (Minimum), wenn der Funktionswert in einem Punkt größer (kleiner) ist, als in einer Umgebung des Punktes.

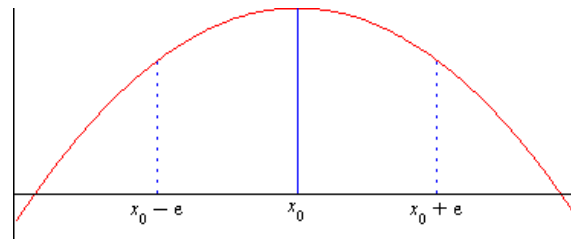


Abbildung 36: Vor dem Maximum wächst die Funktion, dahinter fällt sie

Offensichtlich wächst die Funktion auf der linken Seite eines Maximums (es ist dort also $f'(x) > 0$), auf der rechten Seite fällt die Funktion (also $f'(x) < 0$). Bei einem Minimum verhält es sich genau umgekehrt. In einem Extremum muss stets $f'(x) = 0$ gelten. Dies ist ein erstes Kriterium für das Vorliegen eines Extremums:

3.3.2 Satz (notwendiges Kriterium für Extrema) Sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

3.3.3 Beispiele (1) $f(x) = x^2$ hat in $x = 0$ bekanntlich ein Minimum. Tatsächlich gilt $f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$.

(2) $f(x) = x^3$ hat *kein* Extremum in $x = 0$. Trotzdem ist $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Ableitung auch den Wert 0 annehmen kann, obwohl kein Extremum vorliegt. Das Kriterium nennt man deshalb „notwendig“, da $f'(x) = 0$ zwar notwendig für ein Extremum ist, aber nicht hinreichend. Das Kriterium ist dennoch nützlich, wir können damit nämlich die möglichen Stellen für ein Extremum finden und diese Stellen dann näher untersuchen.

Wie wir oben gesehen haben, wächst auf der linken Seite eines Maximums die Funktion, dieses Wachstum wird aber immer geringer bis dieses Wachstum rechts des Maximums sogar negativ wird, weil die Funktion fällt.

Das Wachstum wird durch f' dargestellt, die Veränderung davon ist die Ableitung hiervon, also f'' . Dass das Wachstum immer geringer wird, bedeutet also mathematisch ausgedrückt, dass die zweite Ableitung negativ wird.

Betrachten wir ein Minimum, gilt die analoge Überlegung. Wir erhalten

3.3.4 Satz (hinreichendes Kriterium für Extrema) f sei 2-mal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

3.3.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, also ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und für $x = 2$. Dies sind also die Stellen, an denen Extrema vorliegen könnten.

Weiter ist $f''(x) = 6x - 6$, folglich $f''(0) = -6 < 0$, f hat in 0 also ein lokales Maximum.

In $x = 2$ ist $f''(2) = 6 > 0$, f hat in 2 also ein lokales Minimum.

Aber auch der letzte Satz löst das Problem, ein Extremum zu finden, noch nicht in jedem Fall:

Es ist z.B. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$, also $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, der Satz macht also keine Aussage. Tatsächlich hat x^3 in 0 kein Extremum. Dies kann man in der Situation, dass $f''(x) = 0$ gilt, aber nicht immer folgern, denn es ist auch $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$ und x^4 hat in 0 ein Minimum.

Die genauen Voraussetzungen für das Vorliegen von Minimum, Maximum oder keinem Extremum beschreibt:

3.3.6 Satz Eine Funktion f sei n -mal differenzierbar auf $]a, b[$ mit $n \geq 2$. An einer Stelle x_0 gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum und
- ist n ungerade, dann hat f in x_0 kein Extremum.

3.3.7 Beispiel Sei $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$. Da

$$f'(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x^2 - 2x + 1) = x^3(x - 1)^2$$

hat f' Nullstellen in 0 und 1. Dies sind also mögliche Stellen für Extremwerte.

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 &\Rightarrow f''(0) = 0 &\text{ und } f''(1) = 0 \\ f'''(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x &\Rightarrow f'''(0) = 0 &\text{ und } f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6 &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 6 \end{aligned}$$

In $x = 0$ ist also $n = 4$ (gerade) und $f^{(4)}(0) > 0$, es liegt also ein lokales Minimum vor.

In $x = 1$ dagegen ist $n = 3$, n ist also ungerade und es gibt hier kein Extremum.

3.4 Die Regeln von de l'Hospital

Ableitungen können auch benutzt werden, um Grenzwerte von Funktionen zu berechnen.

3.4.1 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{0}{0}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mit diesem Satz können wir also Grenzwerte von Quotienten berechnen, bei denen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren.

3.4.2 Bemerkung Der Satz gilt auch, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.3 Beispiele (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?$

Es ist $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ und weiter $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ sowie $(x)' = 1$. Außerdem existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$, die Regel von de l'Hospital ist also anwendbar, und wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = ?$

Auf den ersten Blick ist die Regel von de l'Hospital hier nicht anwendbar, da es sich nicht um den Quotienten zweier Funktionen handelt. Wir können die Funktion aber umschreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^{-1})}{x^{-1}} \end{aligned}$$

(hier kommt nun die Regel von de l'Hospital zum Einsatz, die Voraussetzungen sind erfüllt)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^{-1}} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \underbrace{x^{-1}}_{\rightarrow 0}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die Regel von de l'Hospital gibt es auch noch in einer anderen Form, wenn nämlich sowohl Zähler als auch Nenner gegen Unendlich divergieren:

3.4.4 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{\infty}{\infty}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$.

Gilt⁵ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.4.5 Bemerkung Auch dieser Satz gilt ebenso, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.6 Beispiel $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = ?$

Es ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $(x)' = 1$, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3.5 Das Newton-Verfahren

Wie wichtig die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist, haben wir z.B. bei der Untersuchung von Extremwerten gesehen.

In einigen Fällen, z.B. bei quadratischen Gleichungen (*“p-q-Formel”*), sind wir in der Lage, die Nullstellen zu berechnen. In allgemeineren Fällen ist die exakte Berechnung der Nullstellen aber oft kaum möglich. Tatsächlich ist man nur in den wenigsten Fällen in der Lage, Nullstellen präzise auszurechnen.

Andererseits ist in der Praxis der mathematischen Anwendungen diese exakte Berechnung oft gar nicht erforderlich. In vielen Fällen genügt eine *numerische Approximation*, d.h. eine näherungsweise Bestimmung.

Intervallhalbierungsmethode

Eine einfache Idee, wie eine solche Approximation im Fall einer stetigen Funktion erfolgen könnte, besteht darin, ein Intervall zu betrachten, an dessen Enden die Funktion unterschiedliche Vorzeichen hat. Offensichtlich muss sich dann irgendwo im Intervall eine Nullstelle befinden.

Nun halbiert man das Intervall und betrachtet das Vorzeichen der Funktion in der Intervallmitte. Man kann nun erkennen, in welcher Hälfte die gesuchte Nullstelle liegen muss und hat die Lage der Nullstelle auf diese Intervallhälfte eingegrenzt.

Das Verfahren wiederholt man nun mit der gefundenen Intervallhälfte so lange, bis man die Nullstelle hinreichend genau lokalisiert hat.

3.5.1 Beispiel Führen wir das Verfahren durch, um eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

zu suchen. Sei $[a_i, b_i]$ das betrachtete Intervall im i -ten Schritt. Die Intervallmitte ist dann $\frac{a_i + b_i}{2}$.

⁵Hier ist keine Annahme über $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ erforderlich.

Nach evtl. ein wenig Probieren finden wir heraus, dass z.B. das Intervall $[a_0, b_0] = [0, 6]$ unterschiedliche Vorzeichen an den Intervallenden hat:

i	$[a_i, b_i]$	Mitte $\frac{a_i+b_i}{2}$	$f(a_i)$	$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$	$f(b_i)$	Nullstelle in ...
0	$[0, 6]$	3	-8	-5	16	rechter Hälfte
1	$[3, 6]$	4.5	-5	3.25	16	linker Hälfte
2	$[3, 4.5]$	3.75	-5	-1.4375	3.25	rechter Hälfte
3	$[3.75, 4.5]$	4.125	-1.4375	0.765625	3.25	linker Hälfte
4	$[3.75, 4.125]$	3.9375	-1.4375	-0.37109375	0.765625	rechter Hälfte

Wir sehen also, dass eine Nullstelle irgendwo in $[3.9375, 4.125]$ liegen muss. Tatsächlich gibt es eine Nullstelle in 4.

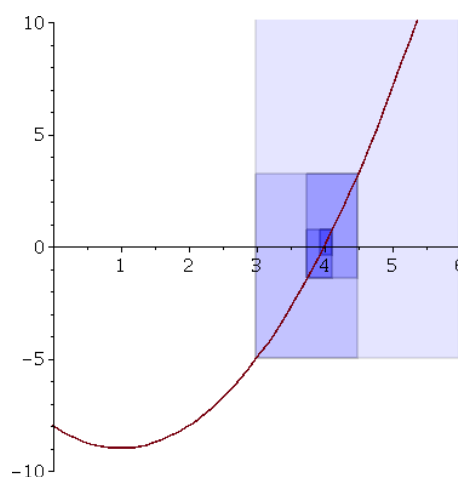


Abbildung 37: Intervallhalbierungsmethode angewandt auf $f(x) = x^2 - 2x - 8$

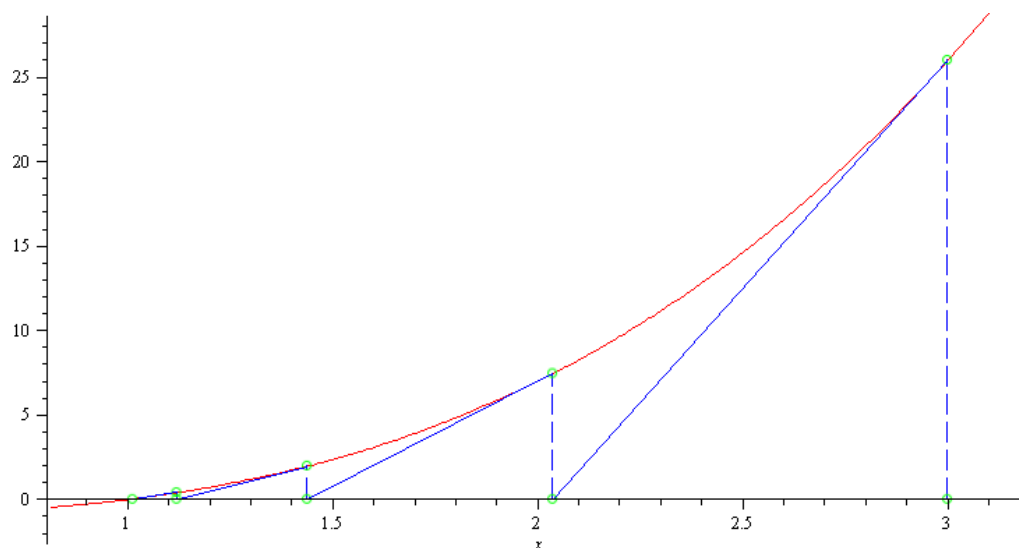
Auch, wenn das Verfahren bei stetigen Funktionen funktioniert, erkennt man jedoch, dass es nur recht langsam zu einem Ergebnis führt, das z.B. auf mehrere Nachkommastellen genau ist.

Newton-Verfahren

Ist die untersuchte Funktion differenzierbar, können wir Differenzialrechnung nutzen, um Nullstellen zu finden. Die Grundidee ist, dass die Nullstelle einer Geraden sehr leicht berechnet werden kann. Wir ersetzen daher die Funktion durch eine Tangente an $f(x)$ im Punkt $x = x_0$, berechnen die Nullstelle x_1 der Tangenten und betrachten dann die Tangente für $x = x_1$, berechnen deren Nullstelle x_2 usw.

Die Tangente an $f(x)$ in $x = x_0$ ist allgemein gegeben durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Abbildung 38: Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 1$ beginnend in $x_0 = 3$

Die Nullstelle hiervon ist, falls $f'(x_0) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
 &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x \\
 \Leftrightarrow f'(x_0)x &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} \\
 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
 \end{aligned}$$

Diesen Punkt $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ verwenden wir als nächsten Punkt x_1 und so weiter:

3.5.2 Definition Sei f differenzierbar auf $]a, b[$. Dann ist die *Newton-Folge* von f mit dem *Startwert* $x_0 \in]a, b[$ die Folge (sofern $f'(x_n) \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
 x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
 &\vdots \\
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Wenn diese Folge konvergiert, dann gegen eine Nullstelle von f :

3.5.3 Satz Sei f differenzierbar auf $]a, b[$ mit stetiger Ableitung. Die Newton-Folge von f mit einem Startwert $x_0 \in]a, b[$ existiere und konvergiere gegen z . Dann ist $f(z) = 0$.

3.5.4 Beispiel Sei $f(x) = x^3 - 1$. Beginnen wir mit $x_0 = 3$, so erhalten wir wegen $f'(x) = 3x^2$ (vgl. Abbildung 38)

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{26}{27} = \frac{55}{27} \approx 2.04 \\x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.44 \\x_3 &\approx 1.12 \\x_4 &\approx 1.0124 \\x_5 &\approx 1.00015\end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt in 1, wir sehen also, dass das Newton-Verfahren hier in nur fünf Schritten eine recht gute Approximation liefert.

Auch andere Startwerte liefern diese Nullstelle, evtl. aber nicht so schnell: beginnen wir mit $x_0 = -1$, erhalten wir

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{3} \approx -0.3333 \\x_2 &= \frac{25}{9} \approx 2.7778 \\x_3 &= 1.895 \\x_4 &\approx 1.3562 \\x_5 &\approx 1.0854 \\x_6 &\approx 1.0065 \\x_7 &\approx 1.00004\end{aligned}$$

3.5.5 Bemerkung Einen Nachteil hat das Newton-Verfahren: es führt nicht immer zum Ziel! Eventuell ist ein $f'(x_n) = 0$, dann existiert die Folge gar nicht. Unter Umständen ist (x_n) auch nicht konvergent.

In der Praxis ist dieser Nachteil des Newton-Verfahrens meistens kein Problem: man wählt einfach einen andern Startwert x_0 und beginnt von Neuem.

4 Integralrechnung

4.1 Integrierbarkeit

Die Grundidee der Integralrechnung ist die Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse. Recht einfach ist diese Fläche z.B. bei konstanten Funktionen $f(x) = c$, da dort die fragliche Fläche ein Rechteck ist. Bei „komplizierteren“ Funktionen versucht man, die Fläche durch mehrere Rechtecke anzunähern.

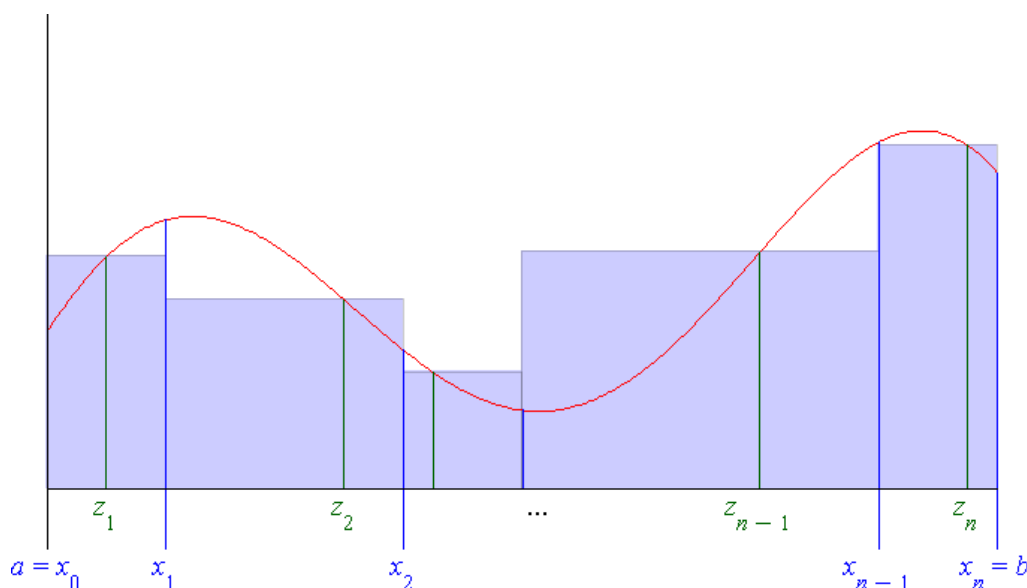


Abbildung 39: Zerlegung in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit Zwischenstellen z_i

Wollen wir beispielsweise die Fläche „unter“ einer Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ approximieren, können wir folgendermaßen vorgehen:

- (1) Wir zerlegen $[a, b]$ auf eine beliebige Weise in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Die x_i bilden eine *Zerlegung* Z :

$$Z : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b .$$

- (2) In jedem Teilintervall wählen wir eine beliebige *Zwischenstelle*

$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

- (3) Für jedes Teilintervall können wir eine rechteckige *Teilfläche* berechnen, die Höhe des Rechtecks ist der Funktionswert an der Zwischenstelle, die Breite des Rechtecks ist die Länge des Teilintervalls:

$$f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

- (4) Zum Schluss addieren wir alle Teilflächen und erhalten eine Approximation an die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f :

$$I_Z = \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

I_Z heißt *Riemannsche Summe* zur Zerlegung Z .

Diese Approximation kann verbessert werden, indem eine *feinere* Zerlegung Z gewählt wird. Sei $\|Z\| = \max\{x_i - x_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ die *Norm* einer Zerlegung Z (anschaulich ist dies die Breite des breitesten Teilintervalls). Mit $\|Z\| \rightarrow 0$ nähert sich offensichtlich I_Z der gesuchten Fläche.

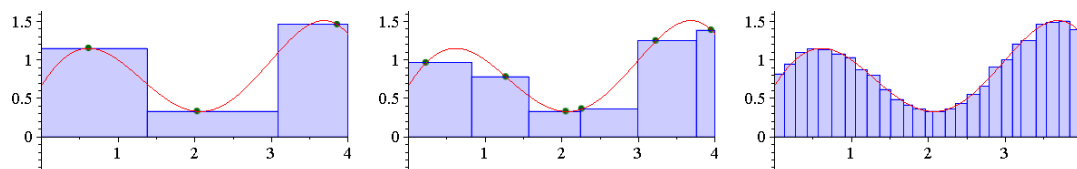


Abbildung 40: Feinere Zerlegungen ergeben genauere Approximationen

Wenn nun das obige Verfahren für beliebige Zerlegungen mit $\|Z\| \rightarrow 0$ und beliebige Zwischenstellen z_i stets das gleiche Ergebnis liefert, können wir diesen Grenzwert als die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse auffassen:

4.1.1 Definition Sei f eine Funktion, die im Intervall $[a, b]$ beschränkt ist (d.h. $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$). Konvergieren die Riemannschen Summen

$$I_Z = \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

für *alle* Folgen von Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit $\|Z\| \rightarrow 0$ und *jede* Wahl von Zwischenstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegen einen Grenzwert I , so ist f *integrierbar* in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} I_Z.$$

$\int_a^b f(x) dx$ ist das *Integral* über f von a bis b . $[a, b]$ heißt *Integrationsintervall*, f ist der *Integrand*.

4.1.2 Bemerkung (1) Ist $f(z_i)$ an einer Zwischenstelle z_i negativ, geht auch die entsprechende Teilfläche negativ in die Berechnung ein. Dadurch unterscheidet sich das Integral dann von der Vorstellung einer „Fläche unter f “.

(2) Die Variable x in $\int_a^b f(x) dx$ ist nur ein Platzhalter. Ebenso könnte man eine andere Variable wählen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\omega) d\omega = \dots$$

4.1.3 Beispiele (1) $\int_a^b c dx = ?$

Hier ist also $f(x) = c$ für alle x . Betrachten wir also eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$

$$Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

mit beliebigen Zwischenstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) \\
 &= c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\
 &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 \pm \cdots + x_n - x_{n-1}) \\
 &= c(-x_0 + x_n) \\
 &= c(b - a)
 \end{aligned}$$

Da $I_Z = c(b - a)$ für beliebige Z und z_i , folgt

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} I_Z = c(b - a) .$$

(2) Betrachten wir die *Dirichlet-Funktion*

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \text{ rational,} \\ 0 & , \text{ falls } x \text{ irrational} \end{cases} \quad \text{mit } D(\delta) = [0, 1].$$

Sei Z eine Zerlegung von $[a, b] = [0, 1]$. In jedem Teilintervall gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Wählen wir zuerst *rationale* Zwischenstellen z_i : Analog zum letzten Beispiel rechnen wir

$$I_Z = \sum_{i=1}^n \underbrace{\delta(z_i)}_{=1} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a = 1 .$$

Andererseits gilt für *irrationale* Zwischenstellen z_i

$$I_Z = \sum_{i=1}^n \underbrace{\delta(z_i)}_{=0} (x_i - x_{i-1}) = 0 .$$

Die Riemannschen Summen I_Z konvergieren also nicht, $\delta(x)$ ist folglich nicht integrierbar.

Wir sehen an diesem Beispiel, wie wichtig es ist, *alle* Zerlegungen und *alle* Zwischenstellen zu betrachten.

Außerdem sehen wir, dass es Funktionen gibt, die nicht integrierbar sind.

Da das Zerlegungsverfahren in der Praxis sehr aufwändig ist, benötigen wir einfachere Kriterien, um integrierbare Funktionen zu erkennen. Es gilt:

4.1.4 Satz (1) Jede auf $[a, b]$ monotone und beschränkte Funktion ist in $[a, b]$ integrierbar.

(2) Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist in $[a, b]$ integrierbar.

4.2 Rechnen mit Integralen

Bisher haben wir Integrale $\int_a^b f(x) dx$ nur für $a < b$ definiert. Wir erweitern die Definition:

4.2.1 Definition Sei f in $[a, b]$ integrierbar. Es sei

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx = 0 .$$

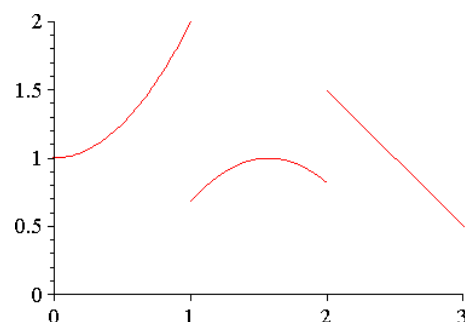
Darüber hinaus gilt:

4.2.2 Satz Eine Funktion f ist in $[a, b]$ genau dann integrierbar, wenn f für jedes $c \in [a, b]$ in $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Eine Folgerung aus diesem Satz ist sehr nützlich: Jede *abschnittsweise stetige* Funktion ist integrierbar.

Da eine solche Funktion in Teilintervallen stetig ist, ist sie dort jeweils integrierbar. Nach Satz 4.2.2 ist dann auch die Funktion auf dem gesamten Intervall integrierbar und ihr Integral ist die Summe der Integrale über die einzelnen Stetigkeitsintervalle.



Satz 4.2.2 sagt uns also, dass sich Integrale addieren, wenn die Integrationsintervalle aneinander gehangen werden. Wir können aber auch mit den Integranden „rechnen“:

4.2.3 Satz Seien f und g integrierbar in $[a, b]$ und sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann sind

$$c \cdot f(x) \quad \text{und} \quad f(x) \pm g(x)$$

integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b c \cdot f(x) dx &= c \cdot \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx . \end{aligned}$$

4.3 Integral- und Differenzialrechnung

Man kann ein Integral auch als „Funktion der oberen Grenze“ auffassen:

Wenn f in $[a, b]$ integrierbar ist, dann ist f nach Satz 4.2.2 auch in allen Intervallen $[a, x]$ mit $x \in [a, b]$ integrierbar. Sei

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Mit dieser Funktion φ gilt folgender Zusammenhang zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung:

4.3.1 Satz Ist f stetig (und damit auch integrierbar) in $[a, b]$, dann ist $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar auf $[a, b]$ mit

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Diesen Satz können wir zur Berechnung von Integralen nutzen (und so vermeiden, Zerlegungen betrachten zu müssen). Zuerst eine Begriffsbestimmung:

4.3.2 Definition Sei f definiert in $[a, b]$. Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* von f , wenn auf $[a, b]$

$$F'(x) = f(x) .$$

4.3.3 Beispiel Nach dem letzten Satz ist φ also eine Stammfunktion von f , da $\varphi'(x) = f(x)$.

4.3.4 Notation Man schreibt Stammfunktionen symbolisch als *unbestimmtes Integral*:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

4.3.5 Bemerkung Wenn eine Funktion eine Stammfunktion hat, dann hat sie auch unendlich viele verschiedene Stammfunktionen.

Sei nämlich F eine Stammfunktion von f , dann ist für beliebige Konstanten $c \in \mathbb{R}$

$$(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x) + 0 = f(x) ,$$

$F(x) + c$ ist also auch eine Stammfunktion.

Insbesondere macht es keinen Sinn, von *der* Stammfunktion zu sprechen, da es immer unendlich viele Stammfunktionen gibt.

Auch die Umkehrung der letzten Bemerkung gilt:

4.3.6 Satz Alle Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, d.h. sind F und G Stammfunktionen von f , dann gilt $F(x) - G(x) = c$.

Ist F eine Stammfunktion von f , gilt also

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} .$$

Wie können wir Stammfunktionen nutzen, Integrale auszurechnen?

Betrachten wir eine integrierbare Funktion f mit einer Stammfunktion F . Da auch φ Stammfunktion von f ist und sich alle Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, gilt für ein $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \varphi(x) + c = \int_a^x f(t) dt + c .$$

Speziell für $x = a$ gilt

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + c = 0 + c = c$$

und damit

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + c = \int_a^b f(t) dt + F(a) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) .$$

Wir haben also das folgende wichtige Resultat:

4.3.7 Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei f eine integrierbare Funktion in $[a, b]$ mit einer Stammfunktion F . Dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(t) \Big|_a^b .$$

Der große Vorteil dieses Satzes ist, dass wir nun leicht Integrale berechnen können, wenn wir eine Stammfunktion kennen. Stammfunktionen wiederum können wir über unser Wissen über Ableitungen erhalten:

4.3.8 Beispiele (1) $\int_0^1 x dx = ?$

Wir wissen $(x^2)' = 2x$, also $(\frac{1}{2}x^2)' = x$. Daher ist

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2} .$$

(2) Da $(x)' = 1$, gilt

$$\int_{-2}^2 1 dx = x \Big|_{-2}^2 = 2 - (-2) = 4 .$$

(3) Wegen $(\cos x)' = -\sin x$ ist

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \underbrace{-\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{(-\cos 0)}_{=1} = 1 .$$

Natürlich kann man auf diese Weise allgemein Stammfunktionen (statt bestimmten Integralen) berechnen:

4.3.9 Beispiele (1) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (s.o., Bsp. 3)

(2) $\int c dx = cx + C$, da $(cx)' = c$.

(3) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, denn wir haben

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right)' = x^\alpha$$

(4) Wir wissen, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Also gilt für $x > 0$

$$(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

und für $x < 0$

$$(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Es gilt also

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad \text{für } x \neq 0,$$

das heißt, es gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_a^b \quad \text{wenn } 0 \notin [a, b].$$

Das letzte Beispiel können wir verallgemeinern: Mit einer Fallunterscheidung wie oben kann man unter Verwendung der Kettenregel nachrechnen, dass

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{für } f(x) \neq 0.$$

Damit haben wir:

4.3.10 Satz Sei $f(x) \neq 0$ in $[a, b]$ und $f'(x)$ stetig auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

4.3.11 Beispiel

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= \ln |1+x| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

4.3.12 Bemerkung Nicht jede integrierbare Funktion hat eine (geschlossen darstellbare) Stammfunktion.

Es gibt Funktion, deren Integral man berechnen kann, die aber keine Stammfunktion haben, die man nicht anders als z.B. durch $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ darstellen kann (was zur praktischen Berechnung nicht viel hilft). Zur Berechnung der Integrale müssen dann Riemannsche Summen oder andere Verfahren benutzt werden.

4.3.13 Beispiel $f(x) = e^{x^2}$ ist stetig, also integrierbar, das Integral darüber kann man somit berechnen. Beispielsweise ist $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.46265$. Eine Stammfunktion kann man aber nicht angeben.

Weitere Beispiele für solche Funktionen ohne Stammfunktionen sind

$$\frac{1}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \dots$$

4.4 Partielle Integration

Zwei Integrationsregeln kennen wir bereits: Satz 4.2.2 und Satz 4.3.10. Satz 4.2.2 sagt, dass mit zwei Funktionen auch deren Summe oder Differenz integrierbar sind. Das gleiche gilt auch für das Produkt zweier integrierbarer Funktionen, eine Formel für das Integral ist aber nicht so einfach anzugeben:

4.4.1 Satz (partielle Integration) Seien f und g differenzierbar in $[a, b]$ mit stetigen Ableitungen. Es gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx .$$

4.4.2 Beispiele (1) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx = ?$

Wählen wir hier $f'(x) = \cos x$ ($\Rightarrow f(x) = \sin x$) und $g(x) = x$ ($\Rightarrow g'(x) = 1$), erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx &= \sin x \cdot x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot 1 dx \\ &= x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} - (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} - 0 + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos 0}_{=1} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 . \end{aligned}$$

(2) $\int_1^e \ln x dx = ?$

Auf den ersten Blick ist dies kein Kandidat für eine partielle Integration, da es sich nicht um ein Produkt handelt. Wir verwenden aber einen simplen Trick:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln x dx \quad (\text{wir wählen } f'(x) = 1 \text{ und } g(x) = \ln x) \\ &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx \\ &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e \\ &= e \ln e - 1 \ln 1 - e + 1 \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

(3) Auch unbestimmte Integrale, also Stammfunktionen, lassen sich mit partieller Integration berechnen: Nach (8) gilt nämlich

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C .$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx &= \sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin x \cdot \sin x}_{=(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2} dx \\
&= \sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 dx - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx \\
&= \sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx
\end{aligned}$$

Anscheinend sind wir hier im Kreis gelaufen und haben wieder das Ausgangsintegral erhalten. Wir können die Gleichung aber umformen, indem wir auf beiden Seiten $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx$ addieren und erhalten

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx &= \sin x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx &= \frac{\pi}{4} .
\end{aligned} \tag{9}$$

Eine Stammfunktion haben wir in (9) gefunden, nämlich

$$\int (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2}(\sin x \cdot \cos x + x) + C \tag{10}$$

4.5 Substitutionsregel

Während die partielle Integration der Produktregel für Ableitungen entspricht, entspricht die Substitutionsregel der Kettenregel:

4.5.1 Satz Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und die Funktion $x(t)$ habe auf $[\alpha, \beta]$ eine stetige Ableitung mit

$$x(\alpha) = a \quad , \quad x(\beta) = b \quad , \quad x(t) \in [a, b] \quad \text{für } t \in [\alpha, \beta] . \tag{11}$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \cdot x'(t) dt .$$

4.5.2 Bemerkung Die Bedingungen (11) besagen anschaulich, dass die Funktion $x(t)$ das Intervall $[\alpha, \beta]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbildet.

4.5.3 Beispiele (1) $\int_0^1 (1+2t)^2 dt = ?$

Hier verwenden wir die Substitutionsregel „von rechts nach links“, um die innere Funktion $1+2t$ durch x zu ersetzen und so ein eventuell einfacheres Integral zu erhalten:

Wir wählen $x(t) = 1+2t$ und $\alpha = 0$ sowie $\beta = 1$. Damit ist dann $a = x(\alpha) = 1$, $b = x(\beta) = 3$ und $x'(t) = 2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \underbrace{(1+2t)^2}_{=x(t)} dt &= \int_0^1 \underbrace{(x(t))^2 \cdot x'(t)}_{=1} \cdot \overbrace{\frac{1}{x'(t)}}^{=\frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t))^2 x'(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 \\
 &= \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3} .
 \end{aligned} \tag{12}$$

Indem wir also die innere Funktion durch x substituieren, soll sich der Integrand vereinfachen. Allerdings benötigen wir dafür den Faktor $x'(t)$ unterhalb des Integrals.

In (12) haben wir $\int_0^1 (1+2t)^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^3$ errechnet, $\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}$ ist aber *keine Stammfunktion* des Integranden!

Um nach Verwendung der Substitutionsregel eine Stammfunktion zu erhalten, müssen wir *resubstituieren*, also die Variable x wieder durch $1+2t$ ersetzen:

$$\int (1+2t)^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{(1+2t)^3}{6} + C .$$

(2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = ?$

Hier empfiehlt es sich, die Substitutionsregel „von links nach rechts“ zu benutzen: Wir können x durch $x(t) = \sqrt{t-1}$ ersetzen, der Nenner des Integranden vereinfacht sich dadurch (denn es gilt $1+x^2 = 1+(\sqrt{t-1})^2 = 1+t-1 = t$) und wir können das Integral berechnen.

Bei der Substitution verändert sich das Integrationsintervall:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sqrt{\alpha-1} &\Rightarrow &\alpha = 1 \\
 1 &= \sqrt{\beta-1} &\Rightarrow &\beta = 2
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also, da $x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_1^2 \frac{x(t)}{\sqrt{1+(x(t))^2}} \cdot x'(t) dt \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{1+(\sqrt{t-1})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 t^{-1/2} dt \\ &= t^{1/2} \Big|_1^2 \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

(3) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Radius 1 bestimmen.

Wie wir wissen, ist der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ein Halbkreis mit Radius 1 (vgl. Abb. 6 auf Seite 18). Wir müssen also

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

berechnen. Hier müssen wir bei der Wahl der Substitution etwas „kreativer“ sein. Nach Satz 2.2.3 ist $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, also $1 - (\sin t)^2 = (\cos t)^2$. Um den Integranden zu vereinfachen, verwenden wir daher die Substitution $x(t) = \sin t$.

Es ist dann $x'(t) = \cos t$ sowie $x(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $x(\frac{\pi}{2}) = 1$, also unter Verwendung von Gleichung (10) auf Seite 59

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-(\sin t)^2}}_{=\sqrt{(\cos t)^2}} \cdot \cos t dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (\sin t \cdot \cos t + t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die Fläche eines Kreises mit Radius 1 ist das Doppelte dieses Halbkreises, also π .

4.6 Uneigentliche Integrale

Integrale $\int_a^b f(x) dx$ können wir bislang nur berechnen, wenn der Integrand $f(x)$ beschränkt und das Integrationsintervall $[a, b]$ endlich ist. Andernfalls würde unsere Definition des Integrals zu keinem Ergebnis führen, da die Riemannschen Summen unter Umständen unendlich groß würden.

Durch Grenzwerte können wir die bisherige Definition aber verallgemeinern. Betrachten wir zuerst den Fall, dass der Integrand an einem Ende des Integrationsintervalls nicht definiert ist:

4.6.1 Definition Sei f integrierbar in jedem Intervall $[a, b]$ mit $b < B$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow B} \int_a^b f(x) dx = \int_a^B f(x) dx ,$$

dann heißt f in $[a, B]$ *uneigentlich integrierbar*.

4.6.2 Bemerkung Ganz analog wird $\int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow A} \int_a^b f(x) dx$ für Funktionen f , die in jedem $[a, b]$ mit $a > A$ integrierbar sind, definiert.

4.6.3 Bemerkung $f(B)$ bzw. $f(A)$ muss hier gar nicht definiert sein. Über $[a, B]$ bzw. $[A, b]$ sind die Funktionen dann nicht (*eigentlich*) integrierbar, sondern nur uneigentlich integrierbar.

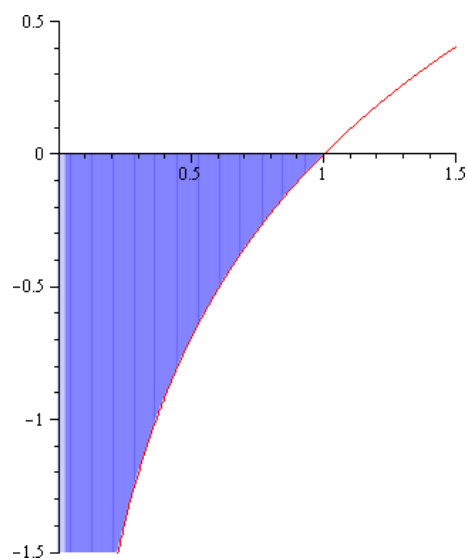
4.6.4 Beispiele (1) $\int_0^1 \ln x dx$

Der Integrand ist in 0 nicht definiert. $\ln x$ ist aber stetig und damit integrierbar in $[a, 1]$ für $a > 0$. Die Stammfunktion von $\ln x$ haben wir auf Seite 58 bereits berechnet, wir haben also für $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_a^1 \ln x dx &= (x \ln x - x) \Big|_a^1 \\ &= 0 - 1 - a \ln a + a , \end{aligned}$$

also unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{a \rightarrow 0} (-1 - a \ln a + a) \\ &= -1 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} + 0 \\ &= -1 - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} \\ &= -1 - \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{a^2}{a} \right) \\ &= -1 - \lim_{a \rightarrow 0} (-a) \\ &= -1 \end{aligned}$$

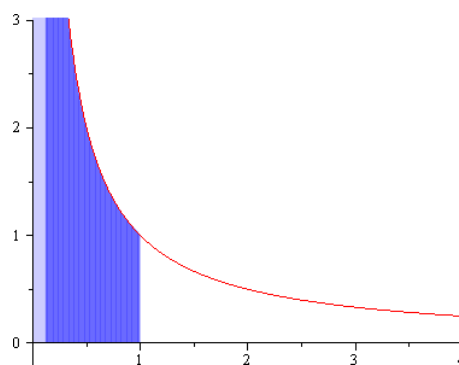
Abbildung 41: $\int \ln x \, dx$: Die markierte Fläche hat den Inhalt 1.

(2) $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$

Auch hier ist der Integrand in 0 nicht definiert aber für $a > 0$ integrierbar. Für $a > 0$ gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \Big|_a^1 = 0 - \ln|a|.$$

Da aber $\lim_{a \rightarrow 0} (-\ln|a|) = \infty$, existiert $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$ nicht. $\frac{1}{x}$ ist also in $[0, 1]$ auch nicht uneigentlich integrierbar.

Abbildung 42: $\int \frac{1}{x} \, dx$: Die markierte Fläche ist unendlich groß.

So, wie wir den Integralbegriff auf Funktionen erweitert haben, die nicht beschränkt oder auf den Integralgrenzen nicht definiert sind, können wir ihn auch auf unbeschränkte Integrationsintervalle ausdehnen:

4.6.5 Definition Sei f uneigentlich integrierbar in jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b < \infty$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx ,$$

dann heißt f *uneigentlich integrierbar* in $[a, \infty[$.

4.6.6 Bemerkung Analog wird $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ definiert.

4.6.7 Bemerkung Ist eine Funktion f für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl in $] -\infty, c]$ als auch in $[c, \infty[$ uneigentlich integrierbar, so schreiben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx .$$

4.6.8 Beispiele (1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

Für $b > 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

und damit

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1 .$$

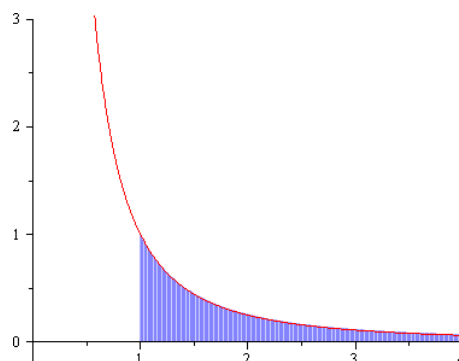


Abbildung 43: $\int \frac{1}{x^2} dx$: Die markierte Fläche ist endlich, der Flächeninhalt ist 1.

$$(2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

Für $b > 1$ gilt hier

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

und wegen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$$

existiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ nicht.

4.7 Integration rationaler Funktionen

Polynome $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sind recht leicht zu integrieren. Wir verwenden $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und die Summenformel und erhalten

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Deutlich schwieriger ist die Integration von rationalen Funktionen, also Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q Polynome sind. Gerade solche Integrale treten z.B. in der theoretischen Chemie auf, wir sollten uns also damit befassen.

Es wird sich zeigen, dass wir dabei mehrere Fälle unterscheiden müssen.

Unsere erste Überlegung gilt dem Grad von Zähler- und Nenner-Polynom. Als *Grad* eines Polynoms bezeichnet man dabei die höchste Potenz, die in dem Polynom auftritt:

4.7.1 Definition Sei $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$, dann ist n der *Grad* von P :

$$\deg(P) = n$$

Betrachten wir zuerst rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, bei denen der Grad des Nenners nicht größer ist als der des Zählers:

Fall 1: $\deg(P) \geq \deg(Q)$

Wir rechnen in diesem Fall den Integranden in ein Polynom und einen leichter zu integrierenden Rest um. Das Verfahren, das wir hierzu benutzen, ist jedem Schüler wohl bekannt: schriftliche Division.

Schauen wir uns eine schriftliche Division näher an:

$$\begin{array}{r} 74 : 3 = 24 + \frac{2}{3} \\ -6 \\ \hline 14 \\ -12 \\ \hline 2 \end{array}$$

Statt Zahlen werden wir nun Polynome verwenden, das Rechenverfahren ist aber das gleiche. An die Stelle der Ziffern treten die Potenzen von x mit ihren Koeffizienten:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 4x - 3) : (x^2 - x - 2) = 2x + 1 + \frac{x-1}{x^2-x-2} \\ -(2x^3 - 2x^2 - 4x) \\ \hline x^2 - 3 \\ -(x^2 - x - 2) \\ \hline x - 1 \end{array}$$

Wie wir sehen, rechnen wir durch diese *Polynomdivision* eine rationale Funktion mit $\deg(P) \geq \deg(Q)$ um in ein Polynom und eine rationale Funktion mit $\deg(P) < \deg(Q)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 2} dx &= \int (2x + 1) dx + \int \frac{x - 1}{x^2 - x - 2} dx \\ &= x^2 + x + \int \frac{x - 1}{x^2 - x - 2} dx . \end{aligned} \quad (13)$$

Mit solchen rationalen Funktionen, bei denen der Grad des Zählers geringer ist als der Grad des Nenners befassen wir uns im Folgenden.

Fall 2: $\deg(P) < \deg(Q)$

1. Schritt: Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren.

Betrachten wir das Nennerpolynom $Q(x)$ und nehmen an, es hätte eine Nullstelle in $x = b_1$. Wir können dann einen *Linearfaktor* $(x - b_1)$ abspalten und übrig bleibt ein Polynom Q_1 , dessen Grad um 1 geringer ist:

$$Q(x) = (x - b_1)Q_1(x) .$$

$Q_1(x)$ erhalten wir z.B. durch eine Polynomdivision $\frac{Q(x)}{x-b_1} = Q_1(x)$.

Dies können wir natürlich wiederholen, indem wir nun von $Q_1(x)$ eine Nullstelle $x = b_2$ abspalten usw.:

$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_k)Q_k(x) .$$

4.7.2 Beispiel Sei

$$Q(x) = x^3 - 3x + 2 .$$

Wir finden (z.B. durch Probieren oder weil wir dies aus anderen Überlegungen wissen) eine Nullstelle in $x = 1$ und erhalten (führen Sie die Polynomdivision einmal selbst zur Übung durch)

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$x^2 + x - 2$ hat (*p-q-Formel*) Nullstellen in 1 und -2:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)^2(x + 2) \end{aligned}$$

Auf dieser Zerlegung in Linearfaktoren basiert nun die Integration von rationalen Funktionen. Betrachten wir ein Beispiel:

$$\int \frac{9x + 9}{x^3 - 3x + 2} dx = ?$$

Hier ist also $P(x) = 9x + 9$ und $Q(x) = x^3 - 3x + 2$.

Wir zerlegen $Q(x)$ in k verschiedene Linearfaktoren:

$$Q(x) = (x - b_1)^{n_1} (x - b_2)^{n_2} \cdots (x - b_k)^{n_k} .$$

In unserem Beispiel hat $Q(x) = x^3 - 3x + 2$ die Linearfaktorzerlegung (s.o.)

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2) ,$$

also $b_1 = 1$, $n_1 = 2$ und $b_2 = -2$, $n_2 = 1$.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung.

Wir stellen nun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ durch mehrere, einfachere Brüche dar. Dazu machen wir einen sog. „Ansatz“, der zeigt, wie diese einfacheren Brüche aufgebaut sein sollen.

Für jeden der verschiedenen Linearfaktoren $(x - b)^n$ addieren wir Summanden der Gestalt

$$\frac{A_1}{x - b} + \frac{A_2}{(x - b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - b)^n} . \quad (14)$$

In unserem Beispiel haben wir die verschiedenen Linearfaktoren $(x - 1)^2$ und $(x + 2)$. Daher addieren wir für $(x - 1)^2$ die Summanden

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2}$$

und für $(x + 2)$ den Summanden

$$\frac{A_3}{x + 2} .$$

Insgesamt haben wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{9x + 9}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x + 2} \\ &= \frac{A_1(x - 1)(x + 2) + A_2(x + 2) + A_3(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)} \\ &= \frac{(A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3}{(x - 1)^2(x + 2)} \end{aligned}$$

3. Schritt: Koeffizientenvergleich.

Da die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein, deshalb gilt

$$9x + 9 = 0x^2 + 9x + 9 = (A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3 ,$$

also, wenn wir die Koeffizienten vergleichen,

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_3 \\ 9 &= A_1 + A_2 - 2A_3 \\ 9 &= -2A_1 + 2A_2 + A_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir z.B. lösen, indem wir aus der ersten Gleichung $A_3 = -A_1$ folgern und dies in die zweite Gleichung einsetzen. Die zweite Gleichung lautet dann

$$9 = A_1 + A_2 - 2(-A_1) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 9 - 3A_1 .$$

Beide Folgerungen können wir in die dritte Gleichung einsetzen und erhalten

$$9 = -2A_1 + 2(9 - 3A_1) + (-A_1) \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1 .$$

Damit können wir dann auch A_2 und A_3 berechnen:

$$A_2 = 9 - 3A_1 = 6 \quad \text{und} \quad A_3 = -A_1 = -1 .$$

4. Schritt: Berechnung des Integrals.

Nachdem wir $A_1, \dots, A_n$ kennen, können wir die Werte in den Ansatz einsetzen und damit das gesuchte Integral berechnen. Wir benötigen hierfür nur noch die Stammfunktionen der Summanden in (14). Diese können wir mittels Satz 4.3.10 und der Substitutionsregel integrieren, das Ergebnis lautet zusammengefasst:

4.7.3 Satz Sei b reell und n eine natürliche Zahl. Dann sind die Funktionen $\frac{1}{(x-b)^n}$ integrierbar für $x \neq b$ und es gilt

$$\int \frac{1}{x-b} dx = \ln|x-b| + C$$

beziehungsweise

$$\int \frac{1}{(x-b)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C \quad \text{für } n \geq 2.$$

Setzen wir die Ergebnisse des 2. und 3. Schritts zusammen, erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \int \frac{9x+9}{x^3-3x+2} dx &= \int \frac{A_1}{x-1} dx + \int \frac{A_2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{A_3}{x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + 6 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel ein uns bereits bekanntes Integral:

4.7.4 Beispiel Wie wir in (13) auf Seite 66 bereits berechnet haben, gilt

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 2} dx = x^2 + x + \int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx.$$

Nullstellen des Nenners liegen in

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Der Ansatz lautet also

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2-x-2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} \\ &= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-2A_2)}{(x-2)(x+1)} \end{aligned} \tag{15}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 - 2A_2 &= -1 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir wie oben durch Einsetzen lösen, um A_1 und A_2 zu berechnen:

Aus $A_1 + A_2 = 1$ folgt

$$A_1 = 1 - A_2$$

und damit ergibt $A_1 - 2A_2 = -1$

$$1 - A_2 - 2A_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3A_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

woraus

$$A_1 = \frac{1}{3}$$

folgt.

Damit haben wir nun

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{A_1}{x-2} dx + \int \frac{A_2}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

4.8 Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen

Es ist leider möglich, dass $Q(x)$ nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt, sondern Polynome zweiten Grades als Faktoren übrig bleiben:

4.8.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x - 1 &= (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned} \tag{16}$$

Wie wir mit der p - q -Formel nachrechnen können, hat $x^2 + x + 1$ keine reellen Nullstellen. Eine weitere Zerlegung in Linearfaktoren ist also nicht möglich.

Falls das Nennerpolynom nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist die Integration mit mehr Aufwand verbunden. Ich empfehle, in dieser Situation nach Möglichkeit ein Computeralgebra-Programm zur Integration zu verwenden, es geht aber natürlich auch von Hand:

Eventuell vorhandene lineare Faktoren werden wie oben behandelt. Es bleiben Faktoren der Form $(x^2 + px + q)^n$. Für jeden solchen Faktor addieren wir im Ansatz zur Partialbruchzerlegung Summanden der Gestalt

$$\frac{a_1x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_nx + b_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Im Beispiel des Polynoms (16) haben wir also den Ansatz

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1}.$$

Neben den Integralen aus Satz 4.7.3 können wir zusätzlich auf die folgenden Typen von Integralen stoßen:

4.8.2 Satz Seien p, q und b reell, $n \in \mathbb{N}$. Hat $x^2 + px + q$ keine reelle Nullstelle, dann gilt

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C, \\
 (2) \quad & \int \frac{x + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{\ln |x^2 + px + q|}{2} + \left(b - \frac{p}{2}\right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx + C, \\
 (3) \quad & \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx = \frac{2x + p}{n(4q - p^2)(x^2 + px + q)^n} + \frac{4n - 2}{n(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx + C, \\
 (4) \quad & \int \frac{x + b}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx = -\frac{1}{2n(x^2 + px + q)^n} + \left(b - \frac{p}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx + C.
 \end{aligned}$$

4.8.3 Beispiel Versuchen wir, $\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx$ zu berechnen.

Den Ansatz bei diesem Nenner-Polynom haben wir uns oben bereits überlegt:

$$\begin{aligned}
 \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1} \\
 &= \frac{A_1(x + 1)(x^2 + x + 1) + A_2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (A_3x + A_4)(x - 1)(x + 1)}{x^4 + x^3 - x - 1} \\
 &= \frac{A_1(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + A_2(x^3 - 1) + (A_3x + A_4)(x^2 - 1)}{x^4 + x^3 - x - 1} \\
 &= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^3 + (2A_1 + A_4)x^2 + (2A_1 - A_3)x + (A_1 - A_2 - A_4)}{x^4 + x^3 - x - 1}
 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_2 + A_3 &= 3 \\
 2A_1 + A_4 &= 0 & \Leftrightarrow & A_4 = -2A_1 \\
 2A_1 - A_3 &= -1 & \Leftrightarrow & A_3 = 2A_1 + 1 \\
 A_1 - A_2 - A_4 &= 1 & \Leftrightarrow & A_2 = A_1 - A_4 - 1 = 3A_1 - 1
 \end{aligned}$$

Setzen wir die letzten drei Zeilen in die erste ein, erhalten wir $A_1 + 3A_1 - 1 + 2A_1 + 1 = 6A_1 = 3$ und damit

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = 2, \quad A_4 = -1.$$

Also ist

$$\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + 2 \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx. \quad (17)$$

Diese drei Integrale können wir mit den Sätzen 4.7.3 und 4.8.2 ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x - 1} dx &= \ln |x - 1| + C_1 \\
 \int \frac{1}{x + 1} dx &= \ln |x + 1| + C_2 \\
 \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{\ln |x^2 + x + 1|}{2} - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\
 &= \frac{\ln |x^2 + x + 1|}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C_3
 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (17) ein, erhalten wir die Stammfunktion

$$\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \frac{\ln |x - 1|}{2} + \frac{\ln |x + 1|}{2} + \ln |x^2 + x + 1| - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

5 Reihen

5.1 Summen und Reihen

Vereinfacht ausgedrückt, sind *Reihen* Summen unendlich vieler Summanden. Wenn aber unendlich viele Werte addiert werden, kann der Wert dieser Summe auch unendlich groß werden und dadurch gar nicht existieren.

Bei manchen Summen ist ihr Wert, oder sogar die Existenz des Wertes, unklar:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots &= ? \\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots &= ? \\ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots &= ? \\ i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots = i - 1 - i + 1 + i + \dots &= ? \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \dots &= ? \end{aligned}$$

Bei solchen „unendlichen Summen“ müssen wir also offensichtlich Grenzwerte betrachten, wie wir sie von Folgen bereits kennen:

5.1.1 Definition Die Folge (s_n) der *Partialsummen*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

heißt *Reihe* über a_k und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Die Reihe heißt *konvergent* zur Summe S , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Nicht konvergente Reihen heißen *divergent*.

5.1.2 Bemerkung Die Reihe muss nicht bei $k = 1$, sondern kann bei jeder ganzen Zahl beginnen:

Analog zu Definition 5.1.1 definiert man $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ für $m \in \mathbb{Z}$.

5.1.3 Bemerkung Das Konvergenzverhalten (Konvergenz oder Divergenz) einer Reihe ändert sich nicht, wenn endlich viele Summanden geändert, weggelassen oder hinzugefügt werden. Wenn die Reihe konvergiert, ändert sich lediglich der Wert der Reihe.

5.1.4 Beispiele (1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots = ?$

Die Partialsummenfolge lautet hier $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, diese Folge, und damit auch die Reihe, ist divergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

entspricht der Partialsummenfolge $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

Diese Folge divergiert gegen Unendlich, es gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$.

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = ?$

Es ist $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{(k-1)k}$ und daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (18)$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Die Reihe ist also konvergent und konvergiert gegen den Wert 1.

(4) Wie wir dies auch von Folgen kennen, ist die Berechnung des Wertes einer Reihe oft sehr viel schwieriger, als „nur“ zu entscheiden, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$: Da alle Summanden $\frac{1}{k^2}$ positiv sind, gilt für die Partialsummen $s_{n+1} > s_n$, die Folge (s_n) ist also streng monoton wachsend.

Weiter ist nach (18)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &< 2 \end{aligned}$$

(s_n) ist also auch nach oben beschränkt. Nach dem Monotonieprinzip (Satz 1.10.3) folgt daher:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent.}$$

Wir wissen nun also, dass diese Reihe gegen einen Wert konvergiert, welchen Wert die Reihe hat, können wir aber nicht sagen.⁶

⁶Mit Methoden, die über den Stoff dieser Veranstaltung hinausgehen, kann man $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zeigen.

Obwohl unendlich viele positive Werte addiert werden, wächst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ also nicht „ins Unendliche“. Möglich ist das nur, weil die addierten Werte immer kleiner werden, die Summanden also gegen Null konvergieren:

5.1.5 Satz Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Dieser Satz gibt uns ein Kriterium, wann eine Reihe *nicht* konvergiert:

Ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ oder divergiert die Folge der Summanden (a_k) , dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

5.1.6 Beispiel Eine oft betrachtete Reihe ist die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für ein $z \in \mathbb{C}$.

1. Fall: $|z| \geq 1$

Wie wir in 1.9.5 (3) gesehen haben, konvergiert (z^k) nicht oder nicht gegen 0, wenn $|z| \geq 1$. Die geometrische Reihe ist also divergent für $|z| \geq 1$.

2. Fall: $|z| < 1$

Nach Satz 1.6.3 über die geometrische Summe ist

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Da $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = 0$ für $|z| < 1$, folgt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{-1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}.$$

Zusammenfassend gilt also:

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist divergent für $|z| \geq 1$ und konvergiert für $|z| < 1$ gegen $\frac{1}{1 - z}$.

Satz 5.1.5 ist kein Kriterium für die Konvergenz einer Reihe: Auch, wenn die Summanden gegen 0 konvergieren, kann die Reihe divergieren.

5.1.7 Beispiel Eine der wichtigsten Reihen ist die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Wählen wir, um die folgende Rechnung etwas zu vereinfachen, eine ganze Zahl m so, dass m die größte Zahl mit $2^m \leq n$ ist. Mit $n \rightarrow \infty$ gilt offensichtlich auch $m \rightarrow \infty$. Für die Partialsummen

gilt

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^m}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
 &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{-mal}} \\
 &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

Die harmonische Reihe ist also divergent (obwohl die Summanden $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergieren).

5.2 Konvergenzkriterien

Wir haben ein Kriterium für Divergenz. Es gibt aber auch einige nützliche Kriterien für die Konvergenz von Reihen:

5.2.1 Satz (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Ist $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.2 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3}$

Für $k \geq 1$ haben wir

$$\left| \frac{k+1}{2k^3} \right| = \frac{k+1}{2k^3} = \frac{k}{2k^3} + \frac{1}{2k^3} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^3} \leq \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2k^3}$.

Analog zum Majorantenkriterium für Konvergenz gibt es auch ein Divergenzkriterium:

5.2.3 Satz (Minorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt für reelle Summanden $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.4 Beispiel Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Für $k \geq 1$ gilt $k \geq \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert nach

dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Während Majoranten- und Minorantenkriterium oft sehr hilfreich sind, benötigt man zu deren Anwendung aber Reihen zum Vergleich, deren Konvergenzverhalten bereits bekannt ist. Die folgenden Kriterien benötigen keine Vergleichsreihen:

5.2.5 Satz (Quotientenkriterium) Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1.$$

5.2.6 Beispiele (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Für $k \geq 1$ gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1) \cdot 2^k}{2^{k+1} \cdot k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{k}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Damit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} < 1,$$

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ ist nach dem Quotientenkriterium also konvergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

Wir haben

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot k^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k.$$

Nach Definition 1.11.3 ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e > 1,$$

dem Quotientenkriterium zufolge ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ also divergent.

5.2.7 Satz (Wurzelkriterium)

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

5.2.8 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

Es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right)^{-1} = \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^{-1}$$

und damit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^{-1} = e^{-1} < 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ ist daher nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Ein letztes Kriterium gilt nur für einen bestimmten Reihentyp. Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit

$a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k heißen *alternierende Reihen*: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$

5.2.9 Satz (Leibniz-Kriterium) Eine alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k ist konvergent, wenn

(1) (a_k) monoton fällt und

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

5.2.10 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe also konvergent.

5.3 Potenzreihen

Ein besonders wichtiger Typ von Reihen ist die Potenzreihe:

5.3.1 Definition Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ heißt *Potenzreihe*.

5.3.2 Beispiel Mit $z_0 = 0$ und $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen hängt, wie bei der geometrischen Reihe, davon ab, welchen Wert z hat. Genauer gilt:

5.3.3 Satz Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gibt es ein $R \geq 0$ oder $R = \infty$, so dass die Reihe konvergiert, wenn $|z - z_0| < R$ und divergiert, wenn $|z - z_0| > R$.

5.3.4 Bemerkung Eine Potenzreihe konvergiert folglich im Inneren eines Kreises um z_0 mit Radius R und divergiert außerhalb dieses Kreises. R heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Betrachten wir nur reelle Zahlen, konvergiert die Reihe im *Konvergenzintervall* $]z_0 - R, z_0 + R[$ und ist für $z > z_0 + R$ und für $z < z_0 - R$, divergent.

Ist $R = \infty$, dann konvergiert die Reihe für alle komplexen bzw. reellen Zahlen.

Für $|z - z_0| = R$ kann die Reihe konvergieren oder divergieren. Der Satz macht über diese Fälle keine Aussage.

5.3.5 Beispiel Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert, wie wir bereits berechnet haben, für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| \geq 1$. Hier ist also der Konvergenzradius $R = 1$.

Der Konvergenzradius kann in vielen Fällen relativ einfach berechnet werden:

5.3.6 Satz Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gilt, sofern die Grenzwerte existieren,

$$(1) \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$(2) \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

5.3.7 Beispiele (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

Hier ist $a_k = \frac{k!}{k^k}$ und $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! \cdot (k+1)^{k+1}}{k^k \cdot (k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k (k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e, \end{aligned}$$

es ist also $R = e$, die Reihe konvergiert daher für komplexe Zahlen z mit $|z| < e$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > e$.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (2z)^k$

Hier haben wir $a_k = k \cdot 2^k$ und $z_0 = 0$.

Wegen $\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{\frac{1}{k} \ln k}$ und da nach der Regel von de l'Hospital $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, haben wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k} \ln k} = e^{\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} \right)} = e^0 = 1.$$

Damit gilt dann

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k \cdot 2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{2^k}} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert also in einem Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$.

Potenzreihen konvergieren also in einem Kreis bzw. Intervall um z_0 . In diesen Bereichen stellt die Potenzreihe daher eine Funktion dar:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Für die Eigenschaften einer solchen Funktion gilt:

5.3.8 Satz Sei⁷ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt:

(1) (*gliedweise Differenziation*) f ist differenzierbar (und damit auch stetig) im Konvergenzbereich mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k (x - x_0)^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k (x - x_0)^{k-1}.$$

(2) (*gliedweise Integration*) f ist integrierbar und hat Stammfunktionen

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C \quad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Die Potenzreihen $f'(z)$ und $\int f(x) dx$ haben ebenfalls den Konvergenzradius R .

⁷Wir hatten Integrale nur im Reellen betrachtet, daher formuliere ich dies auch nur für reelle Potenzreihen. Die Aussagen gelten aber mutatis mutandis auch in $\mathbb{C}$.

5.4 Approximation von Funktionen

Potenzreihen stellen nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts also Funktionen dar. Wie wir nun sehen werden, können aber auch oft umgekehrt Funktionen als Potenzreihen dargestellt werden. Da Potenzreihen recht einfache Objekte sind, kann das sehr nützlich sein.

Bevor wir zu einer gegebenen Funktion die sie darstellende Potenzreihe konstruieren können, untersuchen wir zuerst die Approximation einer Funktion durch ein Polynom. Die Idee dahinter: je höher der Grad des Polynoms, desto genauer soll die Funktion approximiert werden. Wird der Grad „unendlich hoch“, wird aus den Polynomen eine Potenzreihe und diese könnte dann die gleichen Werte wie die Funktion haben.

5.4.1 Bemerkung Der Einfachheit halber formuliere ich diese Überlegungen nur in den reellen Zahlen. Im Prinzip funktioniert das Folgende auch im Komplexen.

5.4.2 Definition Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei f auf $[a, b]$ n -mal differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in [a, b]$. Dann heißt das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

n -tes Taylor-Polynom von f zum Entwicklungspunkt x_0 .

Tatsächlich sind diese Polynome zur Approximation von Funktionen geeignet:

5.4.3 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \ln x$ und als Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Offensichtlich ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{f(1)}{0!} (x - 1)^0 = \ln 1 = 0 \\ T_1(x) &= T_0(x) + \frac{f'(1)}{1!} (x - 1)^1 = x - 1 \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(1)}{2!} (x - 1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2} (x - 1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{3}{2} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

In der Nähe von x_0 ist dies tatsächlich eine gute Näherung an $f(x)$:

$$\begin{aligned} \ln(1.1) &\approx 0.09531 & \text{und} & & T_0(1.1) &= 0 \\ & & & & T_1(1.1) &= 0.1 \\ & & & & T_2(1.1) &= 0.095 \end{aligned}$$

Bereits das zweite Taylorpolynom liefert den Wert $\ln(1.1)$ also auf drei Nachkommastellen. In größerer Entfernung vom Entwicklungspunkt wird die Näherung aber schlechter:

$$\begin{aligned} \ln(1.9) &\approx 0.64185 & \text{und} & & T_0(1.9) &= 0 \\ & & & & T_1(1.9) &= 0.9 \\ & & & & T_2(1.9) &= 0.495 \end{aligned}$$

Diese Beobachtung ist typisch: In der Nähe des Entwicklungspunkts sind Taylorpolynome oft schon für kleine n eine gute Näherung. Je weiter wir uns von x_0 entfernen, desto schlechter wird die Näherung. n muss dann erhöht werden, um eine bessere Approximation zu erhalten.

Auskunft über die Genauigkeit der Approximation gibt

5.4.4 Satz (Taylor-Formel) Sei f in $[a, b]$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, wobei $f^{(n+1)}$ stetig auf $[a, b]$ sei. Weiter sei $M_n \geq |f^{(n+1)}(x)|$ für alle $x \in [a, b]$. Mit $x_0 \in [a, b]$ gilt für alle $x \in [a, b]$

$$|f(x) - T_n(x)| = R_n(x) .$$

Dabei gilt für den Fehler $R_n(x)$ der Approximation

$$R_n(x) \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} .$$

5.4.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \sin x$. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$.

Überlegen wir uns zuerst, wie die Taylor-Polynome von $\sin x$ aussehen: Es gilt

$$f(x) = \sin x , \quad f'(x) = \cos x , \quad f''(x) = -\sin x , \quad f'''(x) = -\cos x , \quad f^{(4)}(x) = \sin x , \dots$$

und damit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ usw.

Allgemein ist $f^{(2m)}(0) = 0$ und $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$. Wir haben also

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} . \quad (19)$$

Die ersten Taylor-Polynome des Sinus sind folglich

$$T_0(x) = x$$

$$T_1(x) = x - \frac{1}{6} x^3$$

$$T_2(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

Mit Satz 5.4.4 können wir die Genauigkeit dieser Näherungen berechnen: Da Sinus und Cosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen, ist $f^{(n+1)}(x) \leq 1$ für alle n , wir können also $M_n = 1$ verwenden und erhalten

$$R_n(x) \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} . \quad (20)$$

In der Nähe von $x = 0$ ist bereits das erste Taylorpolynom $T_1(x) = x - \frac{1}{6} x^3$ eine recht gute Approximation für den Sinus. Der Fehler beträgt maximal

$$R_1(x) \leq \frac{1}{2} |x|^2 ,$$

also z.B. für $x = \frac{\pi}{32} = 11,25^\circ$ ist $R_1(x) \leq 0.0048$.

Für noch kleinere Winkel kann sogar $\sin x \approx x$, also die Approximation durch das nullte Taylorpolynom, hinreichend genau sein:

$$\sin(1^\circ) \approx 0.017452406 \quad T_0(1^\circ) = \frac{2\pi}{360} \approx 0.017453293$$

5.5 Taylor-Reihen

Mit $n \rightarrow \infty$ wird aus einem Taylor-Polynom eine Reihe:

5.5.1 Definition $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe* von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 .

Offenbar gilt

5.5.2 Satz Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dann konvergiert die Taylor-Reihe von $f(x)$ gegen $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Damit können wir also Funktionen durch Potenzreihen darstellen.

5.5.3 Beispiel In (19) haben wir die Taylorpolynome von $f(x) = \sin x$ für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bestimmt:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

Wegen (20) gilt

$$R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und deshalb ist die *Sinus-Reihe*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Ganz analog erhält man die *Cosinus-Reihe*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}.$$

Die Sinus- und die Cosinusreihe konvergieren nicht nur für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern für alle komplexen Zahlen. Dies verwendet man, um *komplexe* Sinus- und Cosinusfunktionen zu definieren:

5.5.4 Definition Für alle komplexen Zahlen z ist

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Eine der wichtigsten Reihen-Entwicklungen ist die Darstellung der Exponentialfunktion durch die *Exponentialreihe*:

Betrachten wir $f(x) = e^x$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Es ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und damit $f^{(k)}(x_0) = 1$ für alle k . Die Taylorpolynome von e^x zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sind also

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k .$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert auch diese Reihe nicht nur für alle reellen, sondern auch für alle komplexen Zahlen und wir erhalten

5.5.5 Satz (Exponentialreihe) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion konvergent und es gilt

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k .$$

6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

6.1 Bezeichnungen

Betrachten wir folgende Situation: $n(t)$ sei die Anzahl der Atome in einer radioaktiven Probe zum Zeitpunkt t . Durch den Zerfall ändert sich diese Zahl, die Ableitung $n'(t)$ gibt bekanntlich diese Veränderung an.

Diese Veränderung ist proportional zur jeweiligen Zahl der Atome $n(t)$, mit einer Substanz-spezifischen Konstanten $k \geq 0$ gilt also

$$n'(t) = -k \cdot n(t) . \quad (21)$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, $n(t)$ zu bestimmen, also eine Funktion zu finden, die die Gleichung (21) erfüllt.

Eine Gleichung, wie beispielsweise (21), in der neben einer unbekannten Funktion auch deren Ableitung auftritt, heißt *Differenzialgleichung*. Wenn es sich wie in (21) um die erste Ableitung handelt, spricht man von einer Differenzialgleichung *erster Ordnung*, allgemein handelt es sich um eine Differenzialgleichung *n-ter Ordnung*, wenn höhere Ableitungen bis zur *n*-ten Ordnung auftreten.

Die gesuchte Funktion, die die Differenzialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differenzialgleichung.

Wenn die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt, können auch sog. *partielle Ableitungen* auftreten, die wir in Teil II dieser Vorlesung kennen lernen werden. In einem solchen Fall handelt es sich um eine *partielle Differenzialgleichung*, sonst um eine *gewöhnliche*.

Wir werden uns an dieser Stelle nur mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung befassen.

6.1.1 Notation Die gesuchte Funktion wird meist $y(x)$ genannt und zur Abkürzung wird „ (x) “ hinter $y, y', \dots$ einfach weggelassen. Aus (21) wird also

$$y' = -ky .$$

Allgemein kann man eine gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y)$$

schreiben.

6.1.2 Beispiel Eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = -2y$ ist $y(x) = e^{-2x}$, denn $y'(x) = -2e^{-2x} = -2y(x)$.

Auch $y(x) = 2e^{-2x}$ oder $y(x) = -e^{-2x}$ sind Lösungen der Differenzialgleichung, wie man leicht nachrechnet.

Wie wir sehen, gibt es im Allgemeinen mehrere Lösungen einer Differenzialgleichung, man spricht dann von einer *Lösungsschar*.

6.2 Richtungsfelder

Die verschiedenen Lösungen einer Differenzialgleichung können graphisch dargestellt werden, sogar ohne, dass man diese Lösungen explizit kennen muss:

Betrachten wir eine Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y) ,$$

(also $y'(x) = f(x, y(x))$) und einen Punkt in einem Koordinatensystem mit den Koordinaten (a, b) . Nehmen wir an, wir hätten eine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt (a, b) läuft, d.h., für die $y(a) = b$ gilt.

Wir kennen dann die Steigung von $y(x)$ in diesem Punkt, nämlich

$$y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, b) .$$

Da uns also in jedem Punkt (a, b) die Steigung von y bekannt ist, können wir diese Steigung für jeden Punkt des Koordinatensystems als kleinen Pfeil einzeichnen. Dies bezeichnet man als *Richtungsfeld*.

Zeichnen wir eine Kurve, die diesen Pfeilen folgt und durch einen bestimmten Punkt (a, b) läuft, so erhalten wir den Graphen einer einzelnen Lösung, die (im Gegensatz zur Lösungsschar) als *partikuläre Lösung* bezeichnet wird. Für diese Lösung gilt dann $y(a) = b$.

Die Aufgabe, zu einer Differenzialgleichung eine partikuläre Lösung mit $y(a) = b$ zu finden, heißt *Anfangswertproblem*.

6.2.1 Beispiel

Betrachten wir $y' = -\frac{x}{y}$

Tragen wir $-\frac{x}{y}$ für verschiedene x und y in eine Tabelle ein, so erhalten wir z.B.

	$x = -2$	-1	0	1	2
$y = 1$	2	1	0	-1	-2
2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

Das Richtungsfeld erhalten wir, indem wir diese Werte als Steigungen in ein Koordinatensystem einzeichnen (Abbildung 44).

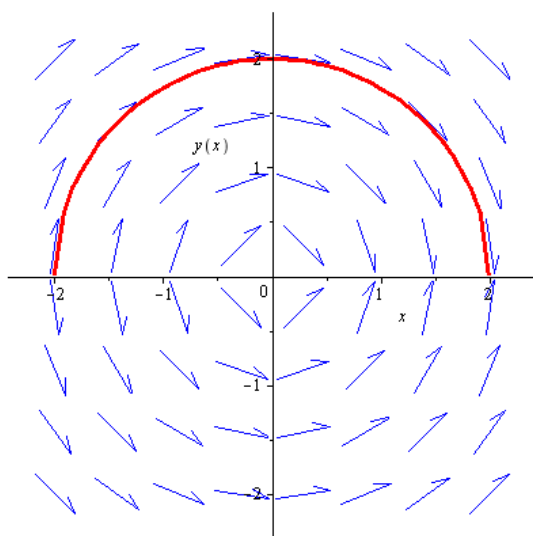
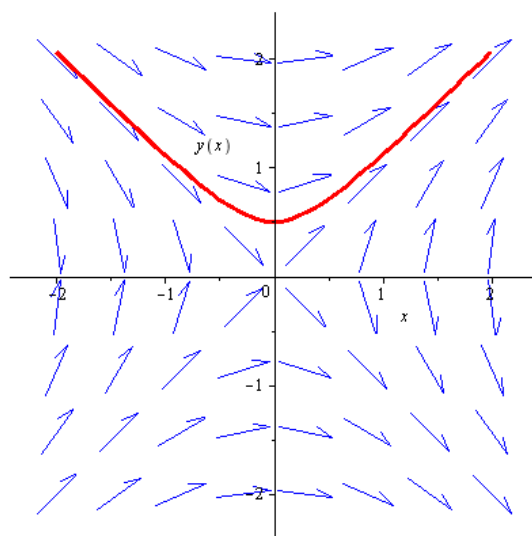
Folgen wir von einem Punkt (x_0, y_0) den Pfeilen, erhalten wir die partikuläre Lösung des Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$.

Weitere Beispiele sind in den Abbildungen 45, 46 und 47 zu finden.

6.3 Elementare Lösungsverfahren

Es gibt leider kein allgemeines Verfahren, eine beliebige Differenzialgleichung zu lösen. Bei bestimmten Typen von Differenzialgleichungen lassen sich aber Lösungen bestimmen.

Wir werden nun einige der gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung klassifizieren und jeweils zugehörige Lösungsansätze ermitteln.

Abbildung 44: Richtungsfeld von $y' = -\frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = 2$ Abbildung 45: Richtungsfeld von $y' = \frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$ **Typ (A)** $y' = f(x)$

Bei diesem Typ hängt die „rechte Seite“ nicht von y ab.

6.3.1 Beispiel $y' = 2x$

Eine Lösung ist hier recht leicht zu finden: Wir integrieren beide Seiten der Differenzialgleichung und erhalten

$$y'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \int y'(x) dx = \int 2x dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 + C.$$

Die Integrationskonstanten beider Seiten haben wir hier zu einer Konstanten C zusammengefasst. $y(x) = x^2 + C$ ist also unsere Lösungsschar.

Für jedes $C \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine partikuläre Lösung: Ist zum Beispiel das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ gegeben, so ergibt sich

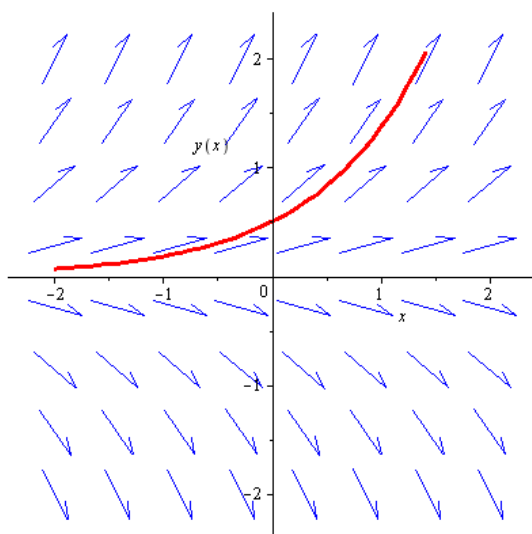
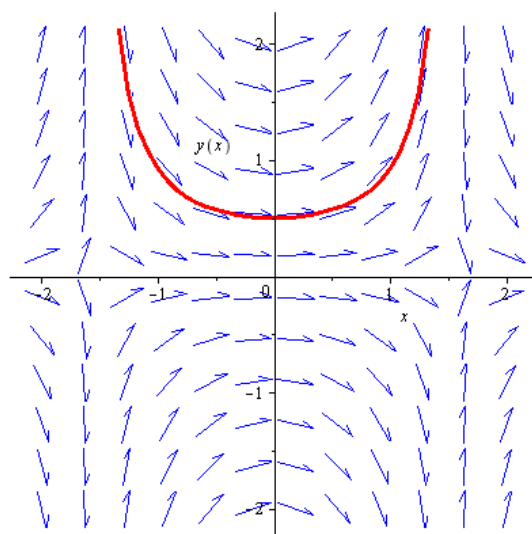
$$y(0) = 0^2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

$y(x) = x^2$ ist folglich in diesem Fall die partikuläre Lösung.

Im Allgemeinen lösen wir eine Differenzialgleichung diesen Typs also durch Integration:

$$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int y'(x) dx = \int f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \int f(x) dx} \quad (22)$$

Auch einige wichtige Anwendungen von Differenzialgleichungen gehören zu diesem Typ:

Abbildung 46: Richtungsfeld von $y' = y$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$ Abbildung 47: Richtungsfeld von $y' = y \cdot \tan x$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

6.3.2 Beispiel Manche chemische Reaktionen gehorchen einem sog. „Geschwindigkeitsgesetz nullter Ordnung“ — ein Beispiel hierfür ist z.B. der Alkoholabbau im Blut, der näherungsweise diesem Gesetz folgt. Dabei ist der Abbau der Konzentration stets konstant, also unabhängig von der Konzentration. Wenn $c_A(t)$ die Konzentration zum Zeitpunkt t beschreibt, gilt also

$$c'_A = -k \quad \text{mit einem Geschwindigkeitskoeffizienten } k.$$

In (22) setzen wir $y = c_A$ und $f(t) = -k$ und erhalten

$$c_A(t) = \int -k \, dt = -k \cdot t.$$

6.4 Autonome Differenzialgleichungen

Typ (B) Autonome Differenzialgleichung $y' = f(y)$

Bei einer *autonomen Differenzialgleichung* taucht x nicht auf der rechten Seite auf (außer als Variable, von der y abhängt: $y = y(x)$). Um eine Lösung herzuleiten, verwenden wir eine „*formale Rechnung*“: dies ist keine mathematisch exakte Überlegung, sondern eher eine Art „Merkregel“, um eine Lösung zu finden. Überraschend oft funktioniert dies und führt zu einem Ergebnis, das sich auch mit exakten Mitteln beweisen ließe:

Sei nun $f(x) \neq 0$. Unsere Differenzialgleichung $y' = f(y)$ kann auch geschrieben werden als

$$y' = \frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \Leftrightarrow \quad x' = \frac{1}{f(y)}.$$

Durch diese formale Rechnung haben wir also x und y vertauscht und so eine Differenzialgleichung des Typs (A) erhalten. Nach (22) finden wir unsere Lösung also auch hier durch Integration und unser Lösungsansatz lautet nun

$$\boxed{x(y) = \int \frac{1}{f(y)} \, dy} \quad (23)$$

Wenn wir dieses Integral berechnen und die Gleichung dann nach y auflösen, erhalten wir eine Lösung von $y' = f(y)$, vorausgesetzt, es ist $f(y) \neq 0$.

Ist dagegen $f(y) = 0$, dann sei y_0 diese Nullstelle, d.h. $f(y_0) = 0$. Die Funktion $y(x) = y_0$ ist dann eine Lösung von $y' = f(y)$. Solche Lösungen, die nicht vom Ansatz (23) abgedeckt werden, bezeichnet man als *Sonderlösungen*.

6.4.1 Beispiel $y' = y$

Hier ist also $f(y) = y$. Überlegen wir uns zuerst die Sonderlösungen, also die Fälle, in denen $f(y) = 0$. Es gibt nur die Nullstelle in $y = 0$,

$$y(x) = 0$$

ist also die einzige Sonderlösung der untersuchten Differenzialgleichung.

Sei nun $f(y) \neq 0$, d.h. $y \neq 0$. Nach unserem Lösungsansatz (23) erhalten wir

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C_1 .$$

Dies müssen wir nach y auflösen:

$$x = \ln |y| + C_1 \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{\ln |y| + C_1} = |y| \cdot e^{C_1} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-C_1} \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{-C_1} \cdot e^x .$$

$\pm e^{-C_1}$ ist dabei auch nur eine reelle Konstante $C \neq 0$, als Lösungsschar erhalten wir also, wenn wir die obige Sonderlösung hinzunehmen,

$$y(x) = 0 \quad \text{oder} \quad y(x) = C e^x \quad \text{mit } C \neq 0 .$$

Eine partikuläre Lösung, zum Beispiel für den Anfangswert $y(1) = 1$, können wir wieder durch Einsetzen in die Lösungsschar finden:

$$y(1) = C e^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{e} ,$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x = e^{x-1} .$$

Wäre andererseits eine Lösung mit $y(1) = 0$ gesucht, dann wäre die Sonderlösung $y(x) = 0$ für alle x die partikuläre Lösung.

6.4.2 Beispiel In Beispiel 6.3.2 haben wir bereits die Reaktionsgeschwindigkeit nullter Ordnung betrachtet. Zerfallsprozesse (also Reaktionen der Art $A \rightarrow B + C$) gehorchen dagegen einem Geschwindigkeitsgesetz 1. Ordnung.

Hier ist die Reaktionsgeschwindigkeit proportional von der Konzentration des zerfallenden Stoffs abhängig. Ist $c_A(t)$ die Konzentration von A, gilt also

$$c'_A = k \cdot c_A .$$

Dies ist eine autonome Differenzialgleichung. Es ist natürlich $k c_A \neq 0$, sonst würde nichts zerfallen. Daher gibt es keine Sonderlösungen.

Unser Ansatz lautet also

$$t = \int \frac{1}{kc_A} dc_A = \frac{1}{k} \ln |c_A| + C_1 .$$

Die Konzentration ist natürlich nicht negativ, also ist $|c_A| = c_A$ und lösen wir dies nach c_A auf, erhalten wir

$$t = \frac{1}{k} \ln c_A + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad k(t - C_1) = \ln c_A \quad \Leftrightarrow \quad c_A = e^{k(t-C_1)} = e^{-kC_1} \cdot e^{kt} = C \cdot e^{kt}$$

mit einer Konstanten $C = e^{-kC_1}$. Diese Konstante lässt sich recht leicht bestimmen:

$$c_A(0) = C \cdot e^0 = C ,$$

es handelt sich also gerade um die Anfangskonzentration $c_A(0)$ und insgesamt wird die Reaktionsgeschwindigkeit beschrieben durch

$$c_A(t) = c_A(0)e^{kt} .$$

6.4.3 Bemerkung In Abschnitt 2.2.2 haben wir auf Seite 22 einen „Exponentialansatz“ verwendet, um eine Funktion zu berechnen, die einen Wachstumsprozess beschreibt. Nun können wir berechnen, dass dieser Ansatz richtig ist:

Wachstums- oder Zerfallssprozesse werden durch die Differenzialgleichung $y' = k \cdot y$ beschrieben und wie wir im letzten Beispiel ausgerechnet haben, wird diese durch Funktionen der Form $y(x) = C \cdot e^{kx}$ gelöst.

6.5 Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

Typ (C) Differenzialgleichung mit „getrennten Variablen“ $y' = h(x) \cdot g(y)$

Auch hier rechnen wir wieder „formal“: Für $g(y) \neq 0$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx} . \quad (24)$$

Da hier die Variablen x und y getrennt auf den beiden Seiten des „=“ stehen, so dass man die Gleichung integrieren kann, spricht man bei diesem Verfahren von einer *Trennung der Variablen*.

An den Nullstellen $g(y_0) = 0$ haben wir dagegen die Sonderlösungen

$$y(x) = y_0 .$$

6.5.1 Beispiel $y' = -\frac{x}{y}$

Das Richtungsfeld dieser Differenzialgleichung kennen wir ja schon aus Abbildung 44.

Wir haben hier eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, denn es ist $y' = -x \cdot \frac{1}{y}$, also $h(x) = -x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$.

Da stets $g(y) \neq 0$, gibt es hier keine Sonderlösungen.

Der Lösungsansatz (24) liefert uns

$$\int y dy = \int -x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -x^2 + C ,$$

wobei wir die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 mit $C = 2(C_2 - C_1)$ zu einer Konstanten zusammengefasst haben. Es folgt also

$$y(x) = \pm \sqrt{C - x^2} .$$

Suchen wir die partikuläre Lösung zu $y(0) = 2$ (vgl. Abbildung 44), finden wir

$$y(0) = \pm \sqrt{C - 0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 4 ,$$

und so

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} .$$

6.6 Lineare Differenzialgleichungen

Typ (D) Lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

6.6.1 Definition Eine lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ nennt man *homogen*, wenn $r(x) = 0$ für alle x , ansonsten *inhomogen*.

Der Term $r(x)$ wird *Inhomogenität* oder *Störung* genannt.

1. Fall: homogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$

Dies ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen vom Typ (C) mit $h(y) = y$. Sonderlösungen erhalten wir für $h(y_0) = y_0 = 0$, also ist

$$y(x) = 0 \quad \text{für alle } x$$

die einzige Sonderlösung. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus (24): Sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int g(x) dx \\ \Rightarrow \ln |y| + C_1 &= G(x) + C_2 \\ \Rightarrow |y| &= e^{G(x)+C_2-C_1} = e^{G(x)} \cdot e^{C_2-C_1} \\ \Rightarrow y &= C \cdot e^{G(x)} \quad \text{mit } C = \pm e^{C_2-C_1} \neq 0. \end{aligned}$$

Die gefundene Sonderlösung $y(x) = 0$ entspricht $C = 0$ in der allgemeinen Lösung, die Lösungsschar einer homogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$\boxed{y(x) = C \cdot e^{G(x)}} \quad (25)$$

mit $C \in \mathbb{R}$ und wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist.

6.6.2 Beispiel Wir schauen uns ein Beispiel für eine homogene lineare Differenzialgleichung an:

$$y' = 3x^2 y$$

Hier ist $g(x) = 3x^2$. Nach (25) ist die Lösungsschar $y(x) = C e^{G(x)}$. Als Stammfunktion von $g(x)$ wählen wir $G(x) = x^3$, die Lösungsschar ist also

$$y(x) = C \cdot e^{x^3}.$$

Haben wir beispielsweise als Anfangswert $y(-1) = 1$ gegeben, gilt

$$y(-1) = C \cdot e^{(-1)^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e$$

und erhalten deshalb als partikuläre Lösung $y(x) = e \cdot e^{x^3} = e^{x^3+1}$.

2. Fall: inhomogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

Die Lösungsschar einer inhomogenen Differenzialgleichung setzt sich aus der Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zusammen:

6.6.3 Satz Die Lösungsschar einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ ist

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) ,$$

wobei

- $y_{\text{hom}}(x)$ die Lösungsschar der homogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$
- $y_{\text{part}}(x)$ eine (beliebige) partikuläre Lösung der linearen Differenzialgleichung

darstellt. Als $y_{\text{part}}(x)$ kann jede Funktion der Schar

$$\int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)} dx \cdot y_{\text{hom}}(x)$$

gewählt werden.

6.6.4 Beispiel Ein Beispiel für eine inhomogene lineare Differenzialgleichung wäre:

$$y' = 3x - \frac{y}{x} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=g(x)} \cdot y + \underbrace{3x}_{=r(x)}$$

Die Lösung finden wir in zwei Schritten: zuerst lösen wir die zugehörige homogene Differenzialgleichung $y' = -\frac{1}{x} \cdot y$.

$-\ln x$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{1}{x}$ und daher ist

$$y_{\text{hom}}(x) = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot x^{-1} .$$

Im zweiten Schritt berechnen wir eine partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)} dx \cdot y_{\text{hom}}(x) &= \int \frac{3x}{C \cdot x^{-1}} dx \cdot C x^{-1} \\ &= 3 \int x^2 dx \cdot x^{-1} \\ &= (x^3 + C_1) \cdot x^{-1} \\ &= x^2 + \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir zum Beispiel $y_{\text{part}}(x) = x^2$ als eine partikuläre Lösung, die Lösungsschar unserer inhomogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C \cdot x^{-1} + x^2 .$$

6.6.5 Beispiel Überlegen wir uns die Situation beim Sprung mit einem Fallschirm: Bekanntlich genügt die Kraft, die auf einen beschleunigten Körper wirkt, dem Gesetz „Masse mal Beschleunigung“ $m \cdot a$.

Andererseits wirkt auf einen Fallschirmspringer die Erdanziehungskraft $m \cdot g$ durch die Erdbeschleunigung g , die reduziert wird um die Bremswirkung durch den Luftwiderstand des Fallschirms. Diese bremsende Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit v , mit einem Reibkoeffizient $k > 0$ als Proportionalitätskonstante, die Bremskraft ist also $k \cdot v$.

Insgesamt haben wir

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v .$$

Die Beschleunigung a ist ja gerade die Veränderung der Geschwindigkeit v , also $v' = a$. Damit erhalten wir

$$mv' = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{k}{m}v + g \quad (26)$$

und dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung.

Wir bestimmen wieder zuerst die Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $v' = -\frac{k}{m}v$. $G(t) = -\frac{k}{m}t$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{k}{m}$, also ist die Lösungsschar der homogenen Differenzialgleichung

$$v_{\text{hom}}(t) = C \cdot e^{G(t)} = Ce^{-kt/m} .$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu finden, berechnen wir

$$\begin{aligned} \int \frac{g}{v_{\text{hom}}(t)} dt \cdot v_{\text{hom}}(t) &= \int \frac{g}{e^{-kt/m}} dt \cdot e^{-kt/m} \\ &= g \int e^{kt/m} dt \cdot e^{-kt/m} \\ &= g \left(\frac{m}{k} e^{kt/m} + C_1 \right) \cdot e^{-kt/m} \\ &= \frac{gm}{k} + C_1 g e^{-kt/m} \end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir $v_{\text{part}}(t) = \frac{gm}{k}$ und so ist die Lösungsschar von (26)

$$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{gm}{k} .$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir, wenn wir annehmen, dass der Springer beim Öffnen des Fallschirms (Zeitpunkt $t = 0$) die Geschwindigkeit v_0 hatte. Dann ist

$$v(0) = Ce^0 + \frac{gm}{k} = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = v_0 - \frac{gm}{k} ,$$

also ist

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{gm}{k} \right) e^{-kt/m} + \frac{gm}{k} .$$

Je länger der Springer am Schirm hängt, desto kleiner wird der erste Summand; es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{k}$. Egal wie schnell der Springer also beim Öffnen des Fallschirms war, hängt er nur lange genug am Schirm, nähert sich seine Geschwindigkeit dem Wert $\frac{gm}{k}$. Ist der Reibkoeffizient k groß genug, ist diese Geschwindigkeit hinreichend klein, die Landung unbeschadet zu überstehen.

7 Exkurs: Fourier-Reihen

Im allgemeinen lässt sich — wie wir in Abschnitt 5.5 gesehen haben — eine Funktion durch ihre Taylor-Reihe als Potenzreihe darstellen. Es gibt weitere Reihen-Darstellungen, die in manchem Kontext ebenfalls sehr nützlich sein können.⁸

Wir erinnern uns: Eine Funktion ist *periodisch mit der Periode T* , wenn

$$f(t) = f(t + T) .$$

Bei solchen Funktionen genügt es offenbar, die Funktion auf einem Intervall der Länge T zu betrachten, beispielsweise auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Ähnlich wie viele Funktionen durch Taylor-Reihen dargestellt werden können, lassen sich periodische Funktionen oft durch *Fourier-Reihen* darstellen:

Zur Abkürzung setzen wir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

ω wird als *Grundfrequenz* bezeichnet. Damit ist die *Fourier-Reihe* von f

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) ,$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt .$$

f wird also als Summe von Cosinus- und Sinus-Funktionen dargestellt. Die Frequenzen $k\omega$ sind Vielfache der Grundfrequenz, die sog. *Oberschwingungen*. Die Koeffizienten a_k und b_k geben die *Amplituden* dieser Schwingungen an.

7.0.1 Beispiel Betrachten wir eine *Rechteck-Kurve* mit Periode $T = 2$ (vgl. Abb. 48, links). Die Fourier-Reihe dieser Funktion ist mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$f(t) = \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1} .$$

Die ersten Summanden dieser Reihe sind bereits eine gute Approximation (vgl. Abb. 48, rechts) der Rechteckkurve, also

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \frac{\sin(7\pi t)}{7} \right) .$$

⁸Ich werde im folgenden nur die groben Ideen und Zusammenhänge erläutern und auf viele Einzelheiten nicht näher eingehen.

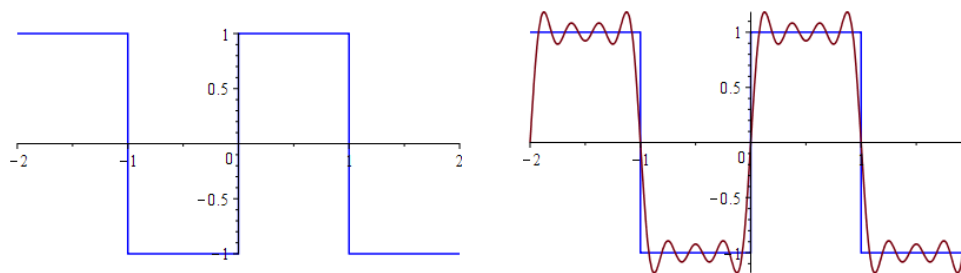


Abbildung 48: Rechteckkurve und ihre Approximation durch die ersten Summanden der Fourier-Reihe

Verwenden wir komplexe Zahlen, lässt sich die Darstellung vereinfachen: Nach der Eulerschen Formel (Satz 2.4.1) ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Damit folgt

$$e^{iy} + e^{-iy} = \cos y + i \sin y + \underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + i \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y} = 2 \cos y ,$$

also

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

und analog erhält man

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = -i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} .$$

Eingesetzt in die Fourier-Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-ik\omega t} - \frac{ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \end{aligned}$$

Setzen wir für $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} , \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} , \\ \text{und} \quad c_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

haben wir die Fourier-Reihe von f in einer viel einfacheren Darstellung:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} .$$

Auch die Koeffizienten c_k können wir umrechnen und erhalten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Leider sind viele Funktionen nicht periodisch. Trotzdem können wir unsere Überlegungen verwenden. Die Idee ist, nicht-periodische Funktionen als periodische Funktionen mit “unendlicher Periode” zu betrachten. Mathematisch betrachten wir also den Grenzwert für $T \rightarrow \infty$.

Wir schreiben unsere Fourier-Reihe ein wenig um:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k e^{ik\omega t} \cdot \omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega) e^{ik\omega t} \cdot \omega \end{aligned} \quad (27)$$

mit $\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k$.

Es ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und deshalb

$$\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Mit $T \rightarrow \infty$ und, wenn wir $k\omega$ durch ω ersetzen, ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (28)$$

$\hat{f}(\omega)$ heißt *Fourier-Transformierte* zu $f(t)$.

Die Reihe in (27) ist eine Riemannsche Summe (vgl. Abschnitt 4.1) zur Funktion $\hat{f}(x) e^{ixt}$ mit Zwischenstellen in $x = k\omega$. Die Breite der einzelnen Intervalle der betrachteten Zerlegung ist gerade ω .

Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$ haben wir $T \rightarrow \infty \iff \omega \rightarrow 0$. Die Zerlegung wird also immer feiner und wir erhalten das *Fourier-Integral*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Die Koeffizienten c_k geben (bei den periodischen Funktionen) die Amplituden der Oberschwingungen mit Frequenz $k\omega$ an. Analog gibt die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ die Amplitude der Frequenz ω an und stellt das *Frequenzspektrum* von f dar.

In der Praxis bedeutet das: während $f(t)$ die Funktion, z.B. ein Signal, in Abhängigkeit von der Zeit t angibt (“Zeitdomäne”), stellt die Fourier-Transformierte in (28) das Signal in Abhängigkeit von den Frequenzen ω dar (“Frequenzdomäne”).

7.0.2 Beispiel Betrachten wir eine Funktion $f(t)$, die z.B. ein gemessenes Signal darstellt, und die zugehörige Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ (Abb. 49).

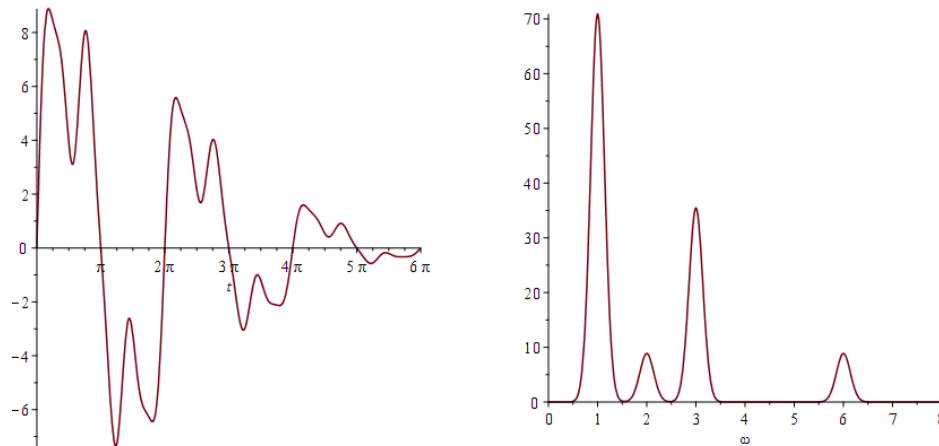


Abbildung 49: Signal $f(t)$ und zugehörige Fouriertransformierte $|\hat{f}(\omega)|$

Man erkennt an der Fourier-Transformierten aus welchen Frequenzen sich das Signal zusammensetzt: Offenbar treten neben der Grundfrequenz ω (hier $\omega = 1$) die Oberschwingungen $2\omega, 3\omega$ und 6ω auf.

Tatsächlich ist im Beispiel aus Abb. 49

$$f(t) = (8 \sin t + \sin(2t) + 4 \sin(3t) + \sin(6t)) \cdot e^{-t^2/100}.$$

Auch die Amplituden der einzelnen Frequenzen sind im Graph von $\hat{f}(\omega)$ gut zu erkennen.

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	2
1.1	Zahlmengen	2
1.2	Komplexe Zahlen	3
1.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	3
1.4	Die Gaußsche Zahlenebene	5
1.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	5
1.6	Summen	7
1.7	Der Betrag	7
1.8	Folgen	9
1.9	Konvergenz	10
1.10	Konvergenz- und Divergenzkriterien	13
1.11	Die Eulersche Zahl	15
2	Funktionen	18
2.1	Funktionen und Graphen	18
2.2	Wichtige Funktionen	19
2.3	Polarkoordinaten	25
2.4	Die komplexe Exponentialfunktion	26
2.5	Komplexe Wurzeln	27
2.6	Grenzwerte von Funktionen	29
2.7	Stetigkeit	31
2.8	Umkehrfunktionen	32
2.9	Logarithmische Skalen	35
3	Differenzialrechnung	38
3.1	Differenzierbarkeit	38
3.2	Ableitungsregeln	40
3.3	Extremwerte	43
3.4	Die Regeln von de l'Hospital	46
3.5	Das Newton-Verfahren	47

4	Integralrechnung	51
4.1	Integrierbarkeit	51
4.2	Rechnen mit Integralen	54
4.3	Integral- und Differenzialrechnung	54
4.4	Partielle Integration	58
4.5	Substitutionsregel	59
4.6	Uneigentliche Integrale	62
4.7	Integration rationaler Funktionen	65
4.8	Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen	69
5	Reihen	71
5.1	Summen und Reihen	71
5.2	Konvergenzkriterien	74
5.3	Potenzreihen	77
5.4	Approximation von Funktionen	79
5.5	Taylor-Reihen	81
6	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	83
6.1	Bezeichnungen	83
6.2	Richtungsfelder	84
6.3	Elementare Lösungsverfahren	84
6.4	Autonome Differenzialgleichungen	86
6.5	Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen	88
6.6	Lineare Differenzialgleichungen	89
7	Exkurs: Fourier-Reihen	92