

6.2 Richtungsfelder

Die verschiedenen Lösungen einer Differenzialgleichung können graphisch dargestellt werden, sogar ohne, dass man diese Lösungen explizit kennen muss:

Betrachten wir eine Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y) ,$$

(also $y'(x) = f(x, y(x))$) und einen Punkt in einem Koordinatensystem mit den Koordinaten (a, b) . Nehmen wir an, wir hätten eine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt (a, b) läuft, d.h., für die $y(a) = b$ gilt.

Wir kennen dann die Steigung von $y(x)$ in diesem Punkt, nämlich

$$y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, b) .$$

Da uns also in jedem Punkt (a, b) die Steigung von y bekannt ist, können wir diese Steigung für jeden Punkt des Koordinatensystems als kleinen Pfeil einzeichnen. Dies bezeichnet man als *Richtungsfeld*.

Zeichnen wir eine Kurve, die diesen Pfeilen folgt und durch einen bestimmten Punkt (a, b) läuft, so erhalten wir den Graphen einer einzelnen Lösung, die (im Gegensatz zur Lösungsschar) als *partikuläre Lösung* bezeichnet wird. Für diese Lösung gilt dann $y(a) = b$.

Die Aufgabe, zu einer Differenzialgleichung eine partikuläre Lösung mit $y(a) = b$ zu finden, heißt *Anfangswertproblem*.

6.2.1 Beispiel

Betrachten wir $y' = -\frac{x}{y}$

Tragen wir $-\frac{x}{y}$ für verschiedene x und y in eine Tabelle ein, so erhalten wir z.B.

	$x = -2$	-1	0	1	2
$y = 1$	2	1	0	-1	-2
2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

Das Richtungsfeld erhalten wir, indem wir diese Werte als Steigungen in ein Koordinatensystem einzeichnen (Abbildung 44).

Folgen wir von einem Punkt (x_0, y_0) den Pfeilen, erhalten wir die partikuläre Lösung des Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$.

Weitere Beispiele sind in den Abbildungen 45, 46 und 47 zu finden.

6.3 Elementare Lösungsverfahren

Es gibt leider kein allgemeines Verfahren, eine beliebige Differenzialgleichung zu lösen. Bei bestimmten Typen von Differenzialgleichungen lassen sich aber Lösungen bestimmen.

Wir werden nun einige der gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung klassifizieren und jeweils zugehörige Lösungsansätze ermitteln.

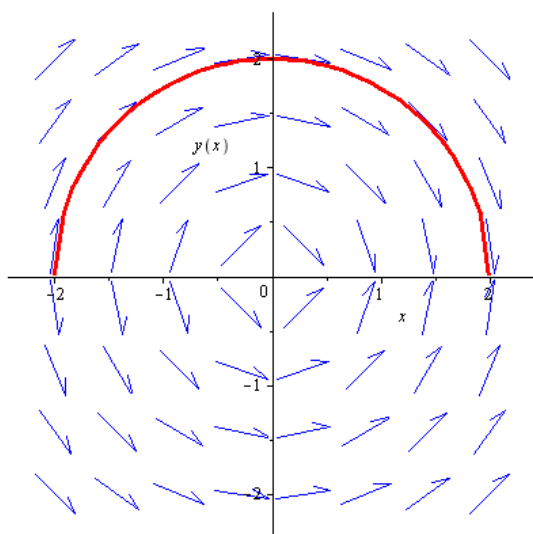


Abbildung 44: Richtungsfeld von $y' = -\frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = 2$

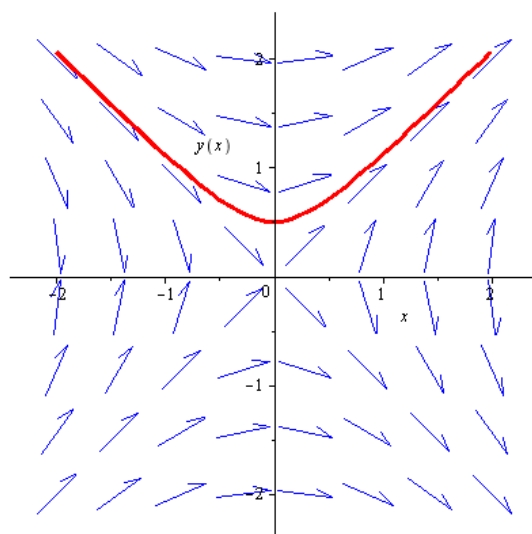


Abbildung 45: Richtungsfeld von $y' = \frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

Typ (A) $y' = f(x)$

Bei diesem Typ hängt die „rechte Seite“ nicht von y ab.

6.3.1 Beispiel $y' = 2x$

Eine Lösung ist hier recht leicht zu finden: Wir integrieren beide Seiten der Differenzialgleichung und erhalten

$$y'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \int y'(x) dx = \int 2x dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 + C.$$

Die Integrationskonstanten beider Seiten haben wir hier zu einer Konstanten C zusammengefasst. $y(x) = x^2 + C$ ist also unsere Lösungsschar.

Für jedes $C \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine partikuläre Lösung: Ist zum Beispiel das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ gegeben, so ergibt sich

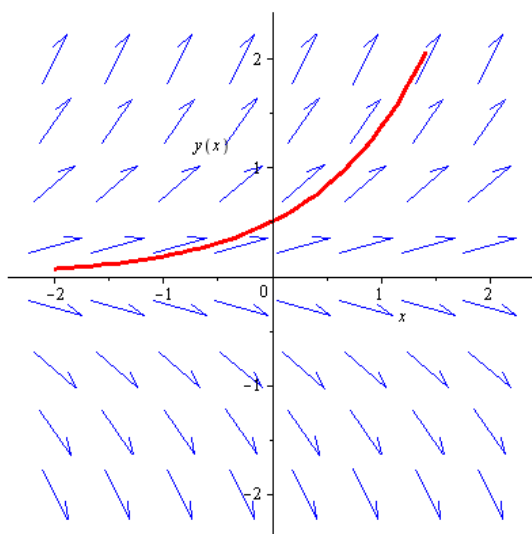
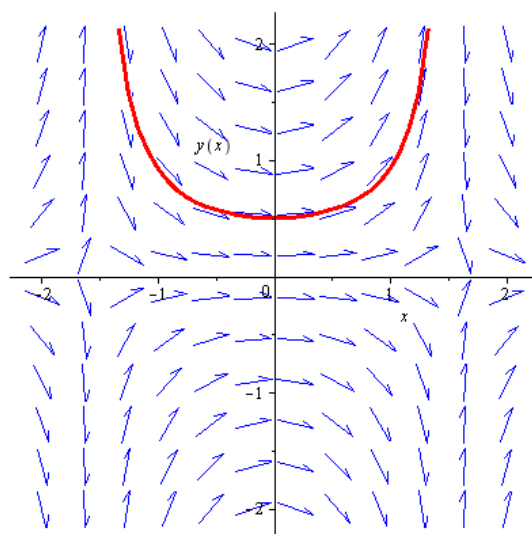
$$y(0) = 0^2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

$y(x) = x^2$ ist folglich in diesem Fall die partikuläre Lösung.

Im Allgemeinen lösen wir eine Differenzialgleichung diesen Typs also durch Integration:

$$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int y'(x) dx = \int f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = \int f(x) dx} \quad (22)$$

Auch einige wichtige Anwendungen von Differenzialgleichungen gehören zu diesem Typ:

Abbildung 46: Richtungsfeld von $y' = y$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$ Abbildung 47: Richtungsfeld von $y' = y \cdot \tan x$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

6.3.2 Beispiel Manche chemische Reaktionen gehorchen einem sog. „Geschwindigkeitsgesetz nullter Ordnung“ — ein Beispiel hierfür ist z.B. der Alkoholabbau im Blut, der näherungsweise diesem Gesetz folgt. Dabei ist der Abbau der Konzentration stets konstant, also unabhängig von der Konzentration. Wenn $c_A(t)$ die Konzentration zum Zeitpunkt t beschreibt, gilt also

$$c'_A = -k \quad \text{mit einem Geschwindigkeitskoeffizienten } k.$$

In (22) setzen wir $y = c_A$ und $f(t) = -k$ und erhalten

$$c_A(t) = \int -k \, dt = -k \cdot t.$$

6.4 Autonome Differenzialgleichungen

Typ (B) Autonome Differenzialgleichung $y' = f(y)$

Bei einer *autonomen Differenzialgleichung* taucht x nicht auf der rechten Seite auf (außer als Variable, von der y abhängt: $y = y(x)$). Um eine Lösung herzuleiten, verwenden wir eine „*formale Rechnung*“: dies ist keine mathematisch exakte Überlegung, sondern eher eine Art „Merkregel“, um eine Lösung zu finden. Überraschend oft funktioniert dies und führt zu einem Ergebnis, das sich auch mit exakten Mitteln beweisen ließe:

Sei nun $f(x) \neq 0$. Unsere Differenzialgleichung $y' = f(y)$ kann auch geschrieben werden als

$$y' = \frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \Leftrightarrow \quad x' = \frac{1}{f(y)}.$$

Durch diese formale Rechnung haben wir also x und y vertauscht und so eine Differenzialgleichung des Typs (A) erhalten. Nach (22) finden wir unsere Lösung also auch hier durch Integration und unser Lösungsansatz lautet nun

$$\boxed{x(y) = \int \frac{1}{f(y)} \, dy} \quad (23)$$

Wenn wir dieses Integral berechnen und die Gleichung dann nach y auflösen, erhalten wir eine Lösung von $y' = f(y)$, vorausgesetzt, es ist $f(y) \neq 0$.

Ist dagegen $f(y) = 0$, dann sei y_0 diese Nullstelle, d.h. $f(y_0) = 0$. Die Funktion $y(x) = y_0$ ist dann eine Lösung von $y' = f(y)$. Solche Lösungen, die nicht vom Ansatz (23) abgedeckt werden, bezeichnet man als *Sonderlösungen*.

6.4.1 Beispiel $y' = y$

Hier ist also $f(y) = y$. Überlegen wir uns zuerst die Sonderlösungen, also die Fälle, in denen $f(y) = 0$. Es gibt nur die Nullstelle in $y = 0$,

$$y(x) = 0$$

ist also die einzige Sonderlösung der untersuchten Differenzialgleichung.

Sei nun $f(y) \neq 0$, d.h. $y \neq 0$. Nach unserem Lösungsansatz (23) erhalten wir

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C_1 .$$

Dies müssen wir nach y auflösen:

$$x = \ln |y| + C_1 \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{\ln |y| + C_1} = |y| \cdot e^{C_1} \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-C_1} \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{-C_1} \cdot e^x .$$

$\pm e^{-C_1}$ ist dabei auch nur eine reelle Konstante $C \neq 0$, als Lösungsschar erhalten wir also, wenn wir die obige Sonderlösung hinzunehmen,

$$y(x) = 0 \quad \text{oder} \quad y(x) = Ce^x \quad \text{mit } C \neq 0.$$

Eine partikuläre Lösung, zum Beispiel für den Anfangswert $y(1) = 1$, können wir wieder durch Einsetzen in die Lösungsschar finden:

$$y(1) = Ce^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{e} ,$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x = e^{x-1} .$$

Wäre andererseits eine Lösung mit $y(1) = 0$ gesucht, dann wäre die Sonderlösung $y(x) = 0$ für alle x die partikuläre Lösung.

6.4.2 Beispiel In Beispiel 6.3.2 haben wir bereits die Reaktionsgeschwindigkeit nullter Ordnung betrachtet. Zerfallsprozesse (also Reaktionen der Art $A \rightarrow B + C$) gehorchen dagegen einem Geschwindigkeitsgesetz 1. Ordnung.

Hier ist die Reaktionsgeschwindigkeit proportional von der Konzentration des zerfallenden Stoffs abhängig. Ist $c_A(t)$ die Konzentration von A, gilt also

$$c'_A = k \cdot c_A .$$

Dies ist eine autonome Differenzialgleichung. Es ist natürlich $kc_A \neq 0$, sonst würde nichts zerfallen. Daher gibt es keine Sonderlösungen.

Unser Ansatz lautet also

$$t = \int \frac{1}{kc_A} dc_A = \frac{1}{k} \ln |c_A| + C_1 .$$

Die Konzentration ist natürlich nicht negativ, also ist $|c_A| = c_A$ und lösen wir dies nach c_A auf, erhalten wir

$$t = \frac{1}{k} \ln c_A + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad k(t - C_1) = \ln c_A \quad \Leftrightarrow \quad c_A = e^{k(t-C_1)} = e^{-kC_1} \cdot e^{kt} = C \cdot e^{kt}$$

mit einer Konstanten $C = e^{-kC_1}$. Diese Konstante lässt sich recht leicht bestimmen:

$$c_A(0) = C \cdot e^0 = C ,$$

es handelt sich also gerade um die Anfangskonzentration $c_A(0)$ und insgesamt wird die Reaktionsgeschwindigkeit beschrieben durch

$$c_A(t) = c_A(0)e^{kt} .$$

6.4.3 Bemerkung In Abschnitt 2.2.2 haben wir auf Seite 22 einen „Exponentialansatz“ verwendet, um eine Funktion zu berechnen, die einen Wachstumsprozess beschreibt. Nun können wir berechnen, dass dieser Ansatz richtig ist:

Wachstums- oder Zerfallssprozesse werden durch die Differenzialgleichung $y' = k \cdot y$ beschrieben und wie wir im letzten Beispiel ausgerechnet haben, wird diese durch Funktionen der Form $y(x) = C \cdot e^{kx}$ gelöst.

6.5 Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

Typ (C) Differenzialgleichung mit „getrennten Variablen“ $y' = h(x) \cdot g(y)$

Auch hier rechnen wir wieder „formal“: Für $g(y) \neq 0$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx} . \quad (24)$$

Da hier die Variablen x und y getrennt auf den beiden Seiten des „=“ stehen, so dass man die Gleichung integrieren kann, spricht man bei diesem Verfahren von einer *Trennung der Variablen*.

An den Nullstellen $g(y_0) = 0$ haben wir dagegen die Sonderlösungen

$$y(x) = y_0 .$$

6.5.1 Beispiel $y' = -\frac{x}{y}$

Das Richtungsfeld dieser Differenzialgleichung kennen wir ja schon aus Abbildung 44.

Wir haben hier eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen, denn es ist $y' = -x \cdot \frac{1}{y}$, also $h(x) = -x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$.

Da stets $g(y) \neq 0$, gibt es hier keine Sonderlösungen.

Der Lösungsansatz (24) liefert uns

$$\int y dy = \int -x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -x^2 + C ,$$

wobei wir die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 mit $C = 2(C_2 - C_1)$ zu einer Konstanten zusammengefasst haben. Es folgt also

$$y(x) = \pm \sqrt{C - x^2} .$$

Suchen wir die partikuläre Lösung zu $y(0) = 2$ (vgl. Abbildung 44), finden wir

$$y(0) = \pm \sqrt{C - 0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 4 ,$$

und so

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} .$$

6.6 Lineare Differenzialgleichungen

Typ (D) Lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

6.6.1 Definition Eine lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ nennt man *homogen*, wenn $r(x) = 0$ für alle x , ansonsten *inhomogen*.

Der Term $r(x)$ wird *Inhomogenität* oder *Störung* genannt.

1. Fall: homogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$

Dies ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen vom Typ (C) mit $h(y) = y$. Sonderlösungen erhalten wir für $h(y_0) = y_0 = 0$, also ist

$$y(x) = 0 \quad \text{für alle } x$$

die einzige Sonderlösung. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus (24): Sei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= \int g(x) dx \\ \Rightarrow \ln |y| + C_1 &= G(x) + C_2 \\ \Rightarrow |y| &= e^{G(x)+C_2-C_1} = e^{G(x)} \cdot e^{C_2-C_1} \\ \Rightarrow y &= C \cdot e^{G(x)} \quad \text{mit } C = \pm e^{C_2-C_1} \neq 0. \end{aligned}$$

Die gefundene Sonderlösung $y(x) = 0$ entspricht $C = 0$ in der allgemeinen Lösung, die Lösungsschar einer homogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$\boxed{y(x) = C \cdot e^{G(x)}} \quad (25)$$

mit $C \in \mathbb{R}$ und wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist.

6.6.2 Beispiel Wir schauen uns ein Beispiel für eine homogene lineare Differenzialgleichung an:

$$y' = 3x^2 y$$

Hier ist $g(x) = 3x^2$. Nach (25) ist die Lösungsschar $y(x) = C e^{G(x)}$. Als Stammfunktion von $g(x)$ wählen wir $G(x) = x^3$, die Lösungsschar ist also

$$y(x) = C \cdot e^{x^3}.$$

Haben wir beispielsweise als Anfangswert $y(-1) = 1$ gegeben, gilt

$$y(-1) = C \cdot e^{(-1)^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e$$

und erhalten deshalb als partikuläre Lösung $y(x) = e \cdot e^{x^3} = e^{x^3+1}$.

2. Fall: inhomogene lineare Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$

Die Lösungsschar einer inhomogenen Differenzialgleichung setzt sich aus der Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zusammen:

6.6.3 Satz Die Lösungsschar einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ ist

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) ,$$

wobei

- $y_{\text{hom}}(x)$ die Lösungsschar der homogenen linearen Differenzialgleichung $y' = g(x) \cdot y$
- $y_{\text{part}}(x)$ eine (beliebige) partikuläre Lösung der linearen Differenzialgleichung

darstellt. Als $y_{\text{part}}(x)$ kann jede Funktion der Schar

$$\int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)} dx \cdot y_{\text{hom}}(x)$$

gewählt werden.

6.6.4 Beispiel Ein Beispiel für eine inhomogene lineare Differenzialgleichung wäre:

$$y' = 3x - \frac{y}{x} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=g(x)} \cdot y + \underbrace{3x}_{=r(x)}$$

Die Lösung finden wir in zwei Schritten: zuerst lösen wir die zugehörige homogene Differenzialgleichung $y' = -\frac{1}{x} \cdot y$.

$-\ln x$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{1}{x}$ und daher ist

$$y_{\text{hom}}(x) = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot x^{-1} .$$

Im zweiten Schritt berechnen wir eine partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{r(x)}{y_{\text{hom}}(x)} dx \cdot y_{\text{hom}}(x) &= \int \frac{3x}{C \cdot x^{-1}} dx \cdot C x^{-1} \\ &= 3 \int x^2 dx \cdot x^{-1} \\ &= (x^3 + C_1) \cdot x^{-1} \\ &= x^2 + \frac{C_1}{x} \end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir zum Beispiel $y_{\text{part}}(x) = x^2$ als eine partikuläre Lösung, die Lösungsschar unserer inhomogenen linearen Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C \cdot x^{-1} + x^2 .$$

6.6.5 Beispiel Überlegen wir uns die Situation beim Sprung mit einem Fallschirm: Bekanntlich genügt die Kraft, die auf einen beschleunigten Körper wirkt, dem Gesetz „Masse mal Beschleunigung“ $m \cdot a$.

Andererseits wirkt auf einen Fallschirmspringer die Erdanziehungskraft $m \cdot g$ durch die Erdbeschleunigung g , die reduziert wird um die Bremswirkung durch den Luftwiderstand des Fallschirms. Diese bremsende Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit v , mit einem Reibkoeffizient $k > 0$ als Proportionalitätskonstante, die Bremskraft ist also $k \cdot v$.

Insgesamt haben wir

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v .$$

Die Beschleunigung a ist ja gerade die Veränderung der Geschwindigkeit v , also $v' = a$. Damit erhalten wir

$$mv' = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' = -\frac{k}{m}v + g \quad (26)$$

und dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung.

Wir bestimmen wieder zuerst die Lösungsschar der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $v' = -\frac{k}{m}v$. $G(t) = -\frac{k}{m}t$ ist eine Stammfunktion von $-\frac{k}{m}$, also ist die Lösungsschar der homogenen Differenzialgleichung

$$v_{\text{hom}}(t) = C \cdot e^{G(t)} = Ce^{-kt/m} .$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu finden, berechnen wir

$$\begin{aligned} \int \frac{g}{v_{\text{hom}}(t)} dt \cdot v_{\text{hom}}(t) &= \int \frac{g}{e^{-kt/m}} dt \cdot e^{-kt/m} \\ &= g \int e^{kt/m} dt \cdot e^{-kt/m} \\ &= g \left(\frac{m}{k} e^{kt/m} + C_1 \right) \cdot e^{-kt/m} \\ &= \frac{gm}{k} + C_1 g e^{-kt/m} \end{aligned}$$

Mit $C_1 = 0$ erhalten wir $v_{\text{part}}(t) = \frac{gm}{k}$ und so ist die Lösungsschar von (26)

$$v(t) = Ce^{-kt/m} + \frac{gm}{k} .$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir, wenn wir annehmen, dass der Springer beim Öffnen des Fallschirms (Zeitpunkt $t = 0$) die Geschwindigkeit v_0 hatte. Dann ist

$$v(0) = Ce^0 + \frac{gm}{k} = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = v_0 - \frac{gm}{k} ,$$

also ist

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{gm}{k} \right) e^{-kt/m} + \frac{gm}{k} .$$

Je länger der Springer am Schirm hängt, desto kleiner wird der erste Summand; es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{k}$. Egal wie schnell der Springer also beim Öffnen des Fallschirms war, hängt er nur lange genug am Schirm, nähert sich seine Geschwindigkeit dem Wert $\frac{gm}{k}$. Ist der Reibkoeffizient k groß genug, ist diese Geschwindigkeit hinreichend klein, die Landung unbeschadet zu überstehen.