Musterlösung MfN I Blatt 10

Nr. 1

Gesucht: $T_4(x)$ von $f(x) = e^x + e^{-x}$ bei $x_0 = 0$.

Ansatz: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$f'(x) = e^x - e^{-x}$, $f''(x) = e^x + e^{-x}$, $f'''(x) = e^x - e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x}$

$$T_4(x) = \frac{f(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4$$

$$= \frac{2}{0!}\cdot 1 + \frac{0}{1!}\cdot x + \frac{2}{2!}\cdot x^2 + \frac{0}{3!}\cdot x^3 + \frac{2}{4!}\cdot x^4$$

$$= \underline{\underline{2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4}}$$

Nr. 2

Gesucht: Taylor-Reihe von $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ bei $x_0 = 1$.

Ansatz: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$, $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$, ...

$$T_n(x) = \frac{1}{1}\cdot(x-1)^0 - \frac{1}{1}(x-1)^1 + \frac{2}{2}(x-1)^2 - \frac{6}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$$

Nr. 3

Gezeigt werden soll: $y(x) = -\ln(C + \cos(x))$ ist Lösung von $y' = e^y \cdot \sin(x)$.

Berechnung y': $y'(x) = -\frac{1}{(C+\cos(x))}\cdot(-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{(C+\cos(x))}$

Berechnung $e^y \cdot \sin(x)$:

$$e^y \cdot \sin(x) = \exp(-\ln(C+\cos(x)))\cdot\sin(x) = \frac{1}{(C+\cos(x))}\cdot\underline{\underline{\sin(x) = y'(x)}}$$