

Musterlösung Übung 9

Aufgabe 9.1

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \rightarrow$ divergiert

$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k = \infty$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ geometrische Reihe:
da $\frac{1}{2} < 1$; konvergiert

$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}$

$\frac{2^k - 1}{2^k} = \frac{2^k}{2^k} - \frac{1}{2^k} = 1$

$\Rightarrow$ konvergiert gegen 2 $\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\right)$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\pi) = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow$ konvergiert

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots \Rightarrow$ divergiert

Aufgabe 9.2

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k^3} \rightarrow$ Integralkriterium: $f(x) = \frac{x+1}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-2} + x^{-3}$

Monotonie: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{(k+1)^3} \cdot \frac{k^3}{k+1} = \frac{(k+2) \cdot k^3}{(k+1)^4} = \frac{k^4 + 2k^3}{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1} < 1$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ monoton fallend

$\int_1^{\infty} x^{-2} + x^{-3} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-2} + x^{-3} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left| -x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} \right|_1^a$

$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \infty$

$\Rightarrow$ konvergent

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ $a_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$ } Minorantenkriterium

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe und divergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ ist auch divergent

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k+1}{k^2}$ Leibnizkriterium

1. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{(k+1)^2} = \frac{(k+2)k^2}{(k+1)^3} = \frac{k^3 + 2k^2}{k^3 + 3k^2 + 3k + 1} < 1$

$\Rightarrow$ monoton fallend

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \stackrel{0}{\rightarrow} 0 \Rightarrow$ konvergiert

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ Wurzelkriterium

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \stackrel{0}{\rightarrow} 0 \Rightarrow$ konvergent

Aufgabe 9.3

Ermitteln Sie, für welche z die Potenzreihe konvergiert, indem Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe berechnen.

9.3 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $a_k = \frac{1}{k!}$ $z_0 = 0$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$

Da $R = \infty$, konvergiert die Reihe für alle komplexen bzw. reellen Zahlen.