

Musterlösung Übung 6

Aufgabe 6.1

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ lässt sich nicht ohne weiteres der Grenzwert bestimmen. $f(x)$ und $g(x)$ sind in $x \neq 0$ differenzierbar und $g'(x) = 1$ also $g'(0) \neq 0$. Nach Satz 3.4.1 kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$f(x)$ und $g(x)$ sind differenzierbar in ganz $\mathbb{R}$ und es gilt:
 $g'(x) = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Somit kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Wieder ist der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ aufgetreten. Da $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = e^x$ wieder auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und die zweite Ableitung von $g(x) = e^x = g''(x)$ wieder ungleich 0 $\forall x \in \mathbb{R}$, lässt sich die Regel von de l'Hospital erneut anwenden.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (\ln(x)) = 0$$

$g(x)$ und $f(x)$ sind in $x \neq 1$ differenzierbar. Außerdem gilt für $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$

$\forall x \in D(g'(x))$. Somit kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2 + e^{-x}) &= 1 - 2 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0\end{aligned}$$

$g(x)$ und $f(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung $g'(x) = 2x \neq 0$ $\forall x \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Wieder ist der Fall $\frac{0}{0}$ aufgetreten. Wieder sind die Funktionen differenzierbar und es gilt $g'(x) = 2 \neq 0$ und es kann die Regel von de l'Hospital erneut angewendet werden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$

Aufgabe 6.2

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{-1}{8}(x^4 - 6x^2 - 11) \\ f'(x) &= \frac{-1}{8}(4x^3 - 12x) = \frac{-1}{2}(x^3 - 3x)\end{aligned}$$

(a) Startwert: $x_0 = -2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -2 - \frac{\frac{19}{8}}{1} = -\frac{35}{8} = -4.375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 \approx -3.52348$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 \approx -3.00619$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 \approx -2.779627$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 \approx -2.735132$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} \Rightarrow x_6 \approx -2.733522$$

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} \Rightarrow x_7 \approx -2.733520$$

Eine Nullstelle ist $x \approx -2.7335$.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	-4.375	-3.5234	-3.0061	-2.7796	-2.7351	-2.7335
$f(x_i)$	2.375	-30.0650	-8.5801	-2.0560	-0.2923	-0.0099	0
$f'(x_i)$	1	35.3076	16.5852	9.07336	6.5684	6.1276	6.1121

(b) Startwert: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = -1$$

Das Verfahren alterniert zwischen zwei Zahlen und konvergiert somit nicht gegen eine Nullstelle.

(c) Startwert: $x_0 = 4$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = \frac{683}{208} \approx 3.28365$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 \approx 2.8868$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 \approx 2.7496$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 \approx 2.7337$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 \approx 2.7335$$

Eine Nullstelle ist $x \approx 2.7335$.

i	0	1	2	3	4
x_i	4	3.28365	2.8868	2.7496	2.7337
$f(x_i)$	-18.625	-5.07064	-1.0559	-0.0995	-0.001
$f'(x_i)$	-26	-12.7773	-7.6985	-6.2695	-6.1141
