

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Musterlösung Blatt 5

Aufgabe 5.1

(a) Mittels Produktregel: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$$\begin{aligned}(e^x(x^2 - 1))' &= (e^x)' \cdot (x^2 - 1) + e^x \cdot (x^2 - 1)' = e^x \cdot (x^2 - 1) + e^x \cdot 2x \\ &= e^x \cdot (x^2 + 2x - 1)\end{aligned}$$

(b) Mittels Quotientenregel: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' &= \frac{(\ln(x))' \cdot x - (x)' \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}\end{aligned}$$

(c) Für die Ableitung der Umkehrabbildung einer Abbildung $f(x)$ gilt:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Wobei hier $f(x) = \sin(x)$, $f^{-1} = \arcsin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Hier kann noch folgende Identität genutzt werden um den Ausdruck weiter zu vereinfachen:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow (\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(d) Der $\tan$ kann in einen $\cos$ - $\sin$ Bruch umgeschrieben werden und so kann die Ableitung mittels Quotientenregel wieder berechnet werden.

$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)' \cdot \cos(x) - \cos(x)' \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.2

(a) Mittels Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$$u(v) = \ln(v) \Rightarrow u'(v) = \frac{1}{v}$$

$$v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} (\ln(\ln(x)))' &= \ln'(\ln(x)) \cdot \ln(x)' = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \end{aligned}$$

(b) Umschreiben liefert:

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)}$$

Mittels Kettenregel(und anschließend Produktregel) lässt sich nun die Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} (x^{\frac{1}{x}})' &= (e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)})' = \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)' \cdot e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)} = \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))'\right) \cdot e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}} \\ &= (1 - \ln(x)) \cdot x^{\frac{1}{x}-2} \end{aligned}$$

(c) Mittels Kettenregel:

$$u(v) = \sqrt{v} = (v)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u'(v) = \frac{1}{2} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$v(x) = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{1 + \sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(d)

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Aufgabe 5.3

(a)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 - 4x^3 - 1 \\f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \stackrel{!}{=} 0 \\&\Rightarrow x^2 \cdot (4x - 12) = 0 \\&\quad x_{1/2} = 0 \\&\quad x_3 = 3\end{aligned}$$

Es werden die nächsten Ableitungen betrachtet:

$$\begin{aligned}f''(x) &= 12x^2 - 24x &\Rightarrow f''(0) &= 0, & f''(3) &= 36 > 0 \\f'''(x) &= 24x - 24 &\Rightarrow f'''(0) &= -24\end{aligned}$$

An dem Punkt $x = 3$ liegt wegen $f^{(2)}(3) > 0$ ein lokales Minimum (da $n=2$, gerade) vor. An dem Punkt $x = 0$ befindet sich wegen $f^{(3)}(0) \neq 0$ ($n=3$, ungerade) kein Extrempunkt. Das lokale Minimum von $f(x)$ ist $f(3) = -28$. $f(x)$ hat kein lokales Maximum.

(b)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 3 \\f'(x) &= 3x^2 - 6x + 3\end{aligned}$$

Setze die erste Ableitung gleich 0 und berechne die Nullstellen.

$$\begin{aligned}3x^2 - 6x + 3 &\stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\&\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1\end{aligned}$$

Es gibt also nur einen Extrempunkt an der Stelle $x = 1$. Wir betrachten die nächsten Ableitungen:

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 6 &\Rightarrow f''(1) &= 0 \\f'''(x) &= 6 &\Rightarrow f'''(1) &= 6 > 0\end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.6 gilt, da $n=3$ ungerade ist, dass für $f(x)$ an der Stelle 1 kein Extremum vorliegt. $f(x)$ hat weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

(c)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\f'(x) &= \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Wenn der Zähler 0 wird, wird auch der Ausdruck 0.

$$1 - x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = -1$$

Es werden wieder die nächsten Ableitungen (mittels Quotientenregel) betrachtet:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)(2 \cdot 2x \cdot (1+x^2))}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{-6x + 2x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow f''(1) = \frac{-1}{2} < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

$$\Rightarrow f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

Da $f^{(2)}(x_{1/2}) \neq 0$ (n=2, gerade), nimmt an Punkt $x_1 = 1$ die Funktion ihr lokales Maximum an mit $f(1) = 0.5$ und ihr lokales Minimum an Punkt $x_2 = -1$ mit dem Wert $f(-1) = -0.5$.

(d)

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

An Punkt $x=0$ liegt das lokale Minimum der Funktion f vor mit dem Wert $f(0) = 2$.