

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Musterlösung Blatt 2

Aufgabe 2.1

Siehe Musterlösung Blatt 1.

Aufgabe 2.2

(a)

$$1 + |x| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$$

1.Fall: $x \geq 0$

$$\Rightarrow |x| = x \quad \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

2.Fall: $x < 0$

$$\Rightarrow |x| = -x \quad \Rightarrow -x \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{-1}{2}, 0\right)$$

Kombiniere beide Ergebnisse für den gesamten Lösungsraum:

$$x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

(b)

$$\frac{2 + |x|}{|2 + x|} < 2$$

Hier darf der Nenner nicht 0 werden, so folgt aus $x \neq -2 \Rightarrow x + 2 > 0$ oder $x + 2 < 0$

1.Fall: $x \geq 0$ und $x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$

$$\Rightarrow |x| = x \quad \text{und} \quad |x + 2| = x + 2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2 + x}{2 + x} < 2 \Rightarrow \text{Dies ist immer wahr.}$$

$$\Rightarrow x \in [0, \infty)$$

2.Fall: $x \geq 0$ und $x + 2 < 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ und $x < -2 \Rightarrow$ Dies ist immer falsch! Dieser Fall ist ausgeschlossen!

3.Fall: $x < 0$ und $x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$ und $x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 0$

$$\Rightarrow |x| = -x \text{ und } |x + 2| = x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{2 + |x|}{|2 + x|} = \frac{2 - x}{2 + x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x < 4 + 2x \Leftrightarrow -2 < 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2}{3} < x$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{-2}{3}, 0 \right)$$

4.Fall: $x < 0$ und $x + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$ und $x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$

$$\Rightarrow |x| = -x \text{ und } |x + 2| = -x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2 + |x|}{|2 + x|} = \frac{2 - x}{-2 - x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x < -4 - 2x \Leftrightarrow x < -6$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -6)$$

Kombiniere alle Ergebnisse der jeweiligen Fälle um den gesamten Lösungsraum zu erhalten:

$$x \in (-\infty, -6) \cup \left(\frac{-2}{3}, \infty \right) = \mathbb{R} \setminus \left[-6, \frac{-2}{3} \right]$$

Aufgabe 2.3

(a)

$$a_n = \left(\frac{2n - 1}{n} \right) = \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n} \right) = \left(2 - \frac{1}{n} \right)$$

Für den Grenzwert erhalten wir mittels Lösungen aus der Vorlesung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 - 0 = \mathbf{2}$$

(b)

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{2n + 1}{n^2} \right)$$

Die Folge ist alternierend, jedoch genauere Untersuchung des Betrags von a_n liefert:

$$|a_n| = \frac{2n+1}{n^2} = \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \quad n \rightarrow \infty \quad 0$$

Somit gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2} = \pm 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$$

(c)

$$a_n = (2 - 2^{-n}) = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Wir berechnen den Grenzwert mittels Bsp 1.9.5 (3):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ 0 < q = \frac{1}{2} < 1, \text{ dies entspricht gerade Fall (b) } 0 < |q| < 1 \\ \Rightarrow q^n = \frac{1}{2^n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \end{aligned}$$

(d)

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n + 1}\right) = \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n+1}\right) = (n-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Die Folge **divergiert**.