

4. Formelblatt

4.1 Die Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ist die mit der Folge (a_k) gebildete *Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Sie heißt *konvergent* zur Summe S , wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ existiert, sonst *divergent*.

4.2 Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Die Umkehrung gilt nicht: Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$.

4.3 Die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert für $|z| \geq 1$ und konvergiert für $|z| < 1$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-z}$.

4.4 (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

4.5 (Minorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

4.6 (Quotienten-/Wurzelkriterium) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ konvergiert, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ und divergiert, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ und divergiert, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$.

4.7 (Leibniz-Kriterium) Eine *alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert, wenn (a_k) monoton fällt und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

4.8 Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ gibt es einen Wert $R \geq 0$ oder $R = \infty$ (*Konvergenzradius*), so dass die Reihe konvergiert, wenn $|x - x_0| < R$ und divergiert, wenn $|x - x_0| > R$. Es gilt $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ und $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$, sofern diese Grenzwerte existieren.

4.9 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f in $[a, b]$ n -mal differenzierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann heißt $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ n -tes *Taylor-Polynom* mit *Entwicklungspunkt* x_0 von f .

4.10 (Taylor-Reihen-Entwicklung) Sei f in $[a, b]$ beliebig oft differenzierbar und sei $x_0 \in]a, b[$. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe* von f mit Entwicklungspunkt x_0 .