

3. Formelblatt

3.1 Sei f eine in $[a, b]$ beschränkte Funktion (d.h. $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$). Konvergieren die *Riemann-Summen* $I_Z = \sum_{i=1}^{\infty} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$ für alle Zerlegungen $Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und jede Wahl von Stützstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegen einen Grenzwert $I = \int_a^b f(x) dx$, so heißt f *integrierbar* in $[a, b]$.

Weiter sei $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ und $\int_a^a f(x) dx = 0$.

3.2 Jede in $[a, b]$ monotone und beschränkte Funktion ist in $[a, b]$ integrierbar.

3.3 Jede in $[a, b]$ stetige Funktion ist in $[a, b]$ integrierbar.

3.4 Sei f in $[a, b]$ definiert. Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* von f , wenn $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$. Ist f in $[a, b]$ stetig, so ist $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar und eine Stammfunktion von f .

3.5 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) Sei f in $[a, b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt $\int_a^b f(t) dt = F(t)|_a^b = F(b) - F(a)$.

3.6	$f(x) =$	c	x^a	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$F(x) =$	cx	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln x $	e^x	$x \ln x - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\arcsin x$ $-\arccos x$

3.7 Sei $f(x) \neq 0$ und $f'(x)$ stetig in $[a, b]$. Dann gilt $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| \Big|_a^b$.

3.8 (partielle Integration) Seien f und g differenzierbar in $[a, b]$ mit stetigen Ableitungen f' und g' . Dann gilt $\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$.

3.9 (Substitutionsregel) Sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und $x(t)$ mit $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ und $x(t) \in [a, b]$ für $t \in [\alpha, \beta]$ habe in $[\alpha, \beta]$ eine stetige Ableitung. Dann gilt $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt$.

3.10 (uneigentliche Integrale) Sei f in jedem Intervall $[a, b]$ mit $b < B$ bzw. $A < a$ integrierbar. f heißt *uneigentlich integrierbar*, wenn der entsprechende Grenzwert existiert:

$$\lim_{b \rightarrow B} \int_a^b f(x) dx = \int_a^B f(x) dx \text{ bzw. } \lim_{a \rightarrow A} \int_a^b f(x) dx = \int_A^b f(x) dx$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ bzw. } \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Ist f für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl in $]-\infty, c]$, als auch in $[c, \infty[$ uneigentlich integrierbar, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$.

3.11 Sei b reell und n eine natürliche Zahl. Für $x \neq b$ gilt $\int \frac{1}{x-b} dx = \ln |x-b| + C$ und $\int \frac{1}{(x-b)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C$ für $n \geq 2$.