2. Formelblatt

2.1 Eine Funktion f *konvergiert* in a gegen einen Grenzwert g, d.h. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$, wenn für *jede* Folge (a_n) mit $a_n \in D(f)$, $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

2.2 Eine Funktion f ist in $a \in D(f)$ *stetig*, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2.3 Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in $a \in D(f)$, wenn der Grenzwert $f'(a) = \dfrac{d}{dx}f(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. f' heißt *Ableitung* von f.
Ist eine Funktion in x differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

2.4

$f(x) =$	c	$ax+b$	x^a	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln x$
$f'(x) =$	0	a	ax^{a-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$\frac{1}{x}$

2.5 Seien f und g in x differenzierbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen in x differenzierbar und es gilt:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \qquad \textbf{(Summenregel)}$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textbf{(Produktregel)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{für } g(x) \neq 0 \qquad \textbf{(Quotientenregel)}$$

2.6 (Kettenregel) Sei h differenzierbar in x und g differenzierbar in $h(x)$. Dann ist die Funktion $f(x) = g(h(x))$ differenzierbar in x mit $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.

2.7 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf $[a,b]$ und sei f differenzierbar in $a < x_0 < b$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

2.8 (logarithmische Differenziation) Seien f und g differenzierbar auf $]a,b[$ mit $f(x) > 0$ für $x \in]a,b[$. Dann ist $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\,(g(x)\cdot \ln f(x))'$.

2.9 (Extrema) Sei f in $]a,b[$ n-mal differenzierbar mit $n \geq 2$. Für $x_0 \in]a,b[$ sei $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Es gilt:

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(c) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein Extremum.

2.10 (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{0}{0}$) Seien f und g in $]a,b[\backslash\{x_0\}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[\backslash\{x_0\}$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (Analog für $x_0 = \pm\infty$.)

2.11 (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{\infty}{\infty}$) Seien f und g in $]a,b[\backslash\{x_0\}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[\backslash\{x_0\}$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (Analog für $x_0 = \pm\infty$.)