1. Formelblatt

1.1 $a^x a^y = a^{x+y} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad a^{xy} = (a^x)^y \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$

1.2 $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b x^y = y \log_b x \qquad \log_c x = \log_c b \cdot \log_b x$

1.3 (Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$) (a) *Imaginäre Einheit*: $i^2 = -1$

(b) $(x+iy) + (a+ib) = (x+a) + i(y+b) \quad , \quad (x+iy) - (a+ib) = (x-a) + i(y-b)$

(c) $(x+iy)(a+ib) = (ax-yb) + i(bx+ay) \quad , \quad \dfrac{x+iy}{a+ib} = \dfrac{ax+by}{a^2+b^2} + i\,\dfrac{ay-bx}{a^2+b^2}$

(d) *Betrag*: Ist $z = x+iy$, so ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

(e) *konjugiert komplexe Zahl*: $\overline{x+iy} = x - iy$. Es gilt z.B. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

1.4 (Geometrische Summe) Für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

1.5 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ die *Fakultät* von n. Weiter sei $0! = 1$.

1.6 (Dreiecksungleichung) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$.

1.7 (Bernoullische Ungleichung) Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1.8 Eine Folge (a_n) ist *konvergent gegen den Grenzwert* a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), wenn für alle $\varepsilon > 0$ alle a_n mit $n \geq n_0$ in der *ε-Umgebung* $U_\varepsilon(a) = \{x : |a-x| < \varepsilon\}$ liegen.
Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

1.9 Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

1.10 (Monotonieprinzip) Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.

1.11 Der Wert $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828182845904\ldots$ heißt *Eulersche Zahl*.

1.12 $\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(x \pm 2\pi) = \sin x \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x \qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

1.13 Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Es ist $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

1.14 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ hat die Polarkoordinaten r und $\varphi \in\,]-\pi, \pi]$ mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ und es gilt $z = re^{i\varphi}$ sowie $z^n = r^n e^{in\varphi}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

1.15 $e^{2\pi i}$=1, also $e^{z+2\pi i} = e^z$, d.h. $f(z) = e^z$ ist periodisch mit der Periode $2\pi i$.