

## 6 Integration rationaler Funktionen

Polynome  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  sind recht leicht zu integrieren. Wir verwenden  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  und die Summenformel und erhalten

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C .$$

Deutlich schwieriger ist die Integration von rationalen Funktionen, also Funktionen  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , wobei  $P$  und  $Q$  Polynome sind. Gerade solche Integrale treten z.B. in der theoretischen Chemie auf, wir sollten uns also damit befassen.

Es wird sich zeigen, dass wir dabei mehrere Fälle unterscheiden müssen.

Unsere erste Überlegung gilt dem Grad von Zähler- und Nenner-Polynom. Als *Grad* eines Polynoms bezeichnet man dabei die höchste Potenz, die in dem Polynom auftritt:

**6.0.1 Definition** Sei  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  ein Polynom mit  $a_n \neq 0$ , dann ist  $n$  der *Grad* von  $P$ :

$$\deg(P) = n$$

Betrachten wir zuerst rationale Funktionen  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , bei denen der Grad des Nenners nicht größer ist als der des Zählers:

### 6.1 Fall 1: $\deg(P) \geq \deg(Q)$

Wir rechnen in diesem Fall den Integranden in ein Polynom und einen leichter zu integrierenden Rest um. Das Verfahren, das wir hierzu benutzen, ist jedem Schüler wohl bekannt: schriftliche Division.

Schauen wir uns eine schriftliche Division näher an:

$$\begin{array}{r} 74 : 3 = 24 + \frac{2}{3} \\ -6 \\ \hline 14 \\ -12 \\ \hline 2 \end{array}$$

Statt Zahlen werden wir nun Polynome verwenden, das Rechenverfahren ist aber das gleiche. An die Stelle der Ziffern treten die Potenzen von  $x$  mit ihren Koeffizienten:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 4x - 3) : (x^2 - x - 2) = 2x + 1 + \frac{x-1}{x^2-x-2} \\ -(2x^3 - 2x^2 - 4x) \\ \hline \phantom{(2x^3 - } x^2 - 3 \\ -(x^2 - x - 2) \\ \hline \phantom{(2x^3 - } x - 1 \end{array}$$

Wie wir sehen, rechnen wir durch diese *Polynomdivision* eine rationale Funktion mit  $\deg(P) \geq \deg(Q)$  um in ein Polynom und eine rationale Funktion mit  $\deg(P) < \deg(Q)$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 2} dx &= \int (2x + 1) dx + \int \frac{x - 1}{x^2 - x - 2} dx \\ &= x^2 + x + \int \frac{x - 1}{x^2 - x - 2} dx . \end{aligned} \quad (15)$$

Mit solchen rationalen Funktionen, bei denen der Grad des Zählers geringer ist als der Grad des Nenners befassen wir uns im Folgenden.

## 6.2 Fall 2: $\deg(P) < \deg(Q)$

### 1. Schritt: Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren.

Betrachten wir das Nennerpolynom  $Q(x)$  und nehmen an, es hätte eine Nullstelle in  $x = b_1$ . Wir können dann einen *Linearfaktor*  $(x - b_1)$  abspalten und übrig bleibt ein Polynom  $Q_1$ , dessen Grad um 1 geringer ist:

$$Q(x) = (x - b_1)Q_1(x) .$$

$Q_1(x)$  erhalten wir z.B. durch eine Polynomdivision  $\frac{Q(x)}{x-b_1} = Q_1(x)$ .

Dies können wir natürlich wiederholen, indem wir nun von  $Q_1(x)$  eine Nullstelle  $x = b_2$  abspalten usw.:

$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_k)Q_k(x) .$$

#### 6.2.1 Beispiel Sei

$$Q(x) = x^3 - 3x + 2 .$$

Wir finden (z.B. durch Probieren oder weil wir dies aus anderen Überlegungen wissen) eine Nullstelle in  $x = 1$  und erhalten (führen Sie die Polynomdivision einmal selbst zur Übung durch)

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$x^2 + x - 2$  hat ( $p$ - $q$ -Formel) Nullstellen in 1 und  $-2$ :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)^2(x + 2) \end{aligned}$$

Auf dieser Zerlegung in Linearfaktoren basiert nun die Integration von rationalen Funktionen. Betrachten wir ein Beispiel:

$$\int \frac{9x + 9}{x^3 - 3x + 2} dx = ?$$

Hier ist also  $P(x) = 9x + 9$  und  $Q(x) = x^3 - 3x + 2$ .

Wir zerlegen  $Q(x)$  in  $k$  verschiedene Linearfaktoren:

$$Q(x) = (x - b_1)^{n_1}(x - b_2)^{n_2} \cdots (x - b_k)^{n_k} .$$

In unserem Beispiel hat  $Q(x) = x^3 - 3x + 2$  die Linearfaktorzerlegung (s.o.)

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) ,$$

also  $b_1 = 1$ ,  $n_1 = 2$  und  $b_2 = -2$ ,  $n_2 = 1$ .

### 2. Schritt: Partialbruchzerlegung.

Wir stellen nun  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  durch mehrere, einfachere Brüche dar. Dazu machen wir einen sog. „Ansatz“, der zeigt, wie diese einfacheren Brüche aufgebaut sein sollen.

Für jeden der verschiedenen Linearfaktoren  $(x - b)^n$  addieren wir Summanden der Gestalt

$$\frac{A_1}{x - b} + \frac{A_2}{(x - b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - b)^n} . \quad (16)$$

In unserem Beispiel haben wir die verschiedenen Linearfaktoren  $(x - 1)^2$  und  $(x + 2)$ . Daher addieren wir für  $(x - 1)^2$  die Summanden

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2}$$

und für  $(x + 2)$  den Summanden

$$\frac{A_3}{x + 2} .$$

Insgesamt haben wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{9x + 9}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x + 2} \\ &= \frac{A_1(x - 1)(x + 2) + A_2(x + 2) + A_3(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)} \\ &= \frac{(A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3}{(x - 1)^2(x + 2)} \end{aligned}$$

### 3. Schritt: Koeffizientenvergleich.

Da die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein, deshalb gilt

$$9x + 9 = 0x^2 + 9x + 9 = (A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3 ,$$

also, wenn wir die Koeffizienten vergleichen,

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_3 \\ 9 &= A_1 + A_2 - 2A_3 \\ 9 &= -2A_1 + 2A_2 + A_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir z.B. lösen, indem wir aus der ersten Gleichung  $A_3 = -A_1$  folgern und dies in die zweite Gleichung einsetzen. Die zweite Gleichung lautet dann

$$9 = A_1 + A_2 - 2(-A_1) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 9 - 3A_1 .$$

Beide Folgerungen können wir in die dritte Gleichung einsetzen und erhalten

$$9 = -2A_1 + 2(9 - 3A_1) + (-A_1) \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1 .$$

Damit können wir dann auch  $A_2$  und  $A_3$  berechnen:

$$A_2 = 9 - 3A_1 = 6 \quad \text{und} \quad A_3 = -A_1 = -1 .$$

### 4. Schritt: Berechnung des Integrals.

Nachdem wir  $A_1, \dots, A_n$  kennen, können wir die Werte in den Ansatz einsetzen und damit das gesuchte Integral berechnen. Wir benötigen hierfür nur noch die Stammfunktionen der Summanden in (16). Diese können wir mittels Satz 4.3.10 und der Substitutionsregel integrieren, das Ergebnis lautet zusammengefasst:

**6.2.2 Satz** Sei  $b$  reell und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann sind die Funktionen  $\frac{1}{(x-b)^n}$  integrierbar für  $x \neq b$  und es gilt

$$\int \frac{1}{x-b} dx = \ln|x-b| + C$$

beziehungsweise

$$\int \frac{1}{(x-b)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C \quad \text{für } n \geq 2.$$

Setzen wir die Ergebnisse des 2. und 3. Schritts zusammen, erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \int \frac{9x+9}{x^3-3x+2} dx &= \int \frac{A_1}{x-1} dx + \int \frac{A_2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{A_3}{x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + 6 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel ein uns bereits bekanntes Integral:

**6.2.3 Beispiel** Wie wir in (15) auf Seite 77 bereits berechnet haben, gilt

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 4x - 3}{x^2 - x - 2} dx = x^2 + x + \int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx.$$

Nullstellen des Nenners liegen in

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Der Ansatz lautet also

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2-x-2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} \\ &= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-2A_2)}{(x-2)(x+1)} \end{aligned} \tag{17}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1 - 2A_2 &= -1 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir wie oben durch Einsetzen lösen, um  $A_1$  und  $A_2$  zu berechnen:

Aus  $A_1 + A_2 = 1$  folgt

$$A_1 = 1 - A_2$$

und damit ergibt  $A_1 - 2A_2 = -1$

$$1 - A_2 - 2A_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3A_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

woraus

$$A_1 = \frac{1}{3}$$

folgt.

Damit haben wir nun

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{A_1}{x-2} dx + \int \frac{A_2}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

### 6.3 Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen

Es ist leider möglich, dass  $Q(x)$  nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt, sondern Polynome zweiten Grades als Faktoren übrig bleiben:

#### 6.3.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x - 1 &= (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned} \quad (18)$$

Wie wir mit der  $p$ - $q$ -Formel nachrechnen können, hat  $x^2 + x + 1$  keine reellen Nullstellen. Eine weitere Zerlegung in Linearfaktoren ist also nicht möglich.

Falls das Nennerpolynom nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist die Integration mit mehr Aufwand verbunden. Ich empfehle, in dieser Situation nach Möglichkeit ein Computeralgebra-Programm zur Integration zu verwenden, es geht aber natürlich auch von Hand:

Eventuell vorhandene lineare Faktoren werden wie oben behandelt. Es bleiben Faktoren der Form  $(x^2 + px + q)^n$ . Für jeden solchen Faktor addieren wir im Ansatz zur Partialbruchzerlegung Summanden der Gestalt

$$\frac{a_1x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_nx + b_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Im Beispiel des Polynoms (18) haben wir also den Ansatz

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1}.$$

Neben den Integralen aus Satz 6.2.2 können wir also auf die folgenden Typen von Integralen stoßen:

**6.3.2 Satz** Seien  $p, q$  und  $b$  reell,  $n \in \mathbb{N}$ . Hat  $x^2 + px + q$  keine reelle Nullstelle, dann gilt

- (1)  $\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C,$
- (2)  $\int \frac{x + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{\ln|x^2 + px + q|}{2} + \left(b - \frac{p}{2}\right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx + C,$
- (3)  $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx = \frac{2x + p}{n(4q - p^2)(x^2 + px + q)^n} + \frac{4n - 2}{n(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx + C,$
- (4)  $\int \frac{x + b}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx = -\frac{1}{2n(x^2 + px + q)^n} + \left(b - \frac{p}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n+1}} dx + C.$

**6.3.3 Beispiel** Versuchen wir,  $\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx$  zu berechnen.

Den Ansatz bei diesem Nenner-Polynom haben wir uns oben bereits überlegt:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{A_1(x+1)(x^2+x+1) + A_2(x-1)(x^2+x+1) + (A_3x+A_4)(x-1)(x+1)}{x^4+x^3-x-1} \\ &= \frac{A_1(x^3+2x^2+2x+1) + A_2(x^3-1) + (A_3x+A_4)(x^2-1)}{x^4+x^3-x-1} \\ &= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^3 + (2A_1+A_4)x^2 + (2A_1-A_3)x + (A_1-A_2-A_4)}{x^4+x^3-x-1} \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 3 \\ 2A_1 + A_4 &= 0 & \Leftrightarrow & A_4 = -2A_1 \\ 2A_1 - A_3 &= -1 & \Leftrightarrow & A_3 = 2A_1 + 1 \\ A_1 - A_2 - A_4 &= 1 & \Leftrightarrow & A_2 = A_1 - A_4 - 1 = 3A_1 - 1 \end{aligned}$$

Setzen wir die letzten drei Zeilen in die erste ein, erhalten wir  $A_1 + 3A_1 - 1 + 2A_1 + 1 = 6A_1 = 3$  und damit

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = 2, \quad A_4 = -1.$$

Also ist

$$\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx. \quad (19)$$

Diese drei Integrale können wir mit den Sätzen 6.2.2 und 6.3.2 ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} dx &= \ln|x-1| + C_1 \\ \int \frac{1}{x+1} dx &= \ln|x+1| + C_2 \\ \int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{\ln|x^2 + x + 1|}{2} - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{\ln|x^2 + x + 1|}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (19) ein, erhalten wir die Stammfunktion

$$\int \frac{3x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} + \frac{\ln|x+1|}{2} + \ln|x^2 + x + 1| - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

## 7 Exkurs: Fourier-Reihen

Im allgemeinen lässt sich also eine Funktion durch ihre Taylor-Reihe als Potenzreihe darstellen. Es gibt weitere Reihen-Darstellungen, die in manchem Kontext ebenfalls sehr nützlich sein können.<sup>7</sup>

Wir erinnern uns: Eine Funktion ist *periodisch mit der Periode T*, wenn

$$f(t) = f(t + T) .$$

Bei solchen Funktionen genügt es offenbar, die Funktion auf einem Intervall der Länge  $T$  zu betrachten, beispielsweise auf  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

Ähnlich wie viele Funktionen durch Taylor-Reihen dargestellt werden können, lassen sich periodische Funktionen oft durch *Fourier-Reihen* darstellen:

Zur Abkürzung setzen wir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

$\omega$  wird als *Grundfrequenz* bezeichnet. Damit ist die *Fourier-Reihe* von  $f$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt .$$

$f$  wird also als Summe von Cosinus- und Sinus-Kurven dargestellt. Die Frequenzen  $k\omega$  dieser Kurven sind Vielfache der Grundfrequenz, die sog. *Oberschwingungen*. Die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  geben die *Amplituden* dieser Kurven an.

**7.0.1 Beispiel** Betrachten wir eine *Rechteck-Kurve* mit Periode  $T = 2$  (vgl. Abb. 45, links). Die Fourier-Reihe dieser Funktion ist mit  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$f(t) = \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1} .$$

Die ersten Summanden dieser Reihe sind bereits eine gute Approximation (vgl. Abb. 45, rechts) der Rechteckkurve, also

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \left( \sin(\pi t) + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \frac{\sin(7\pi t)}{7} \right) .$$

<sup>7</sup>Ich werde im folgenden nur die groben Ideen und Zusammenhänge erläutern und auf viele Einzelheiten nicht näher eingehen.

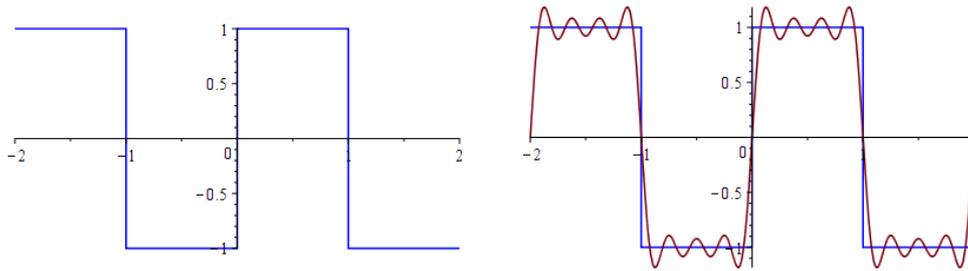


Abbildung 45: Rechteckkurve und ihre Approximation durch die ersten Summanden der Fourier-Reihe

Verwenden wir komplexe Zahlen, lässt sich die Darstellung vereinfachen: Nach der Eulerschen Formel (Satz 2.4.1) ist  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ . Damit folgt

$$e^{iy} + e^{-iy} = \cos y + i \sin y + \underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + i \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y} = 2 \cos y ,$$

also

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

und analog erhält man

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = -i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} .$$

Eingesetzt in die Fourier-Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-ik\omega t} - \frac{ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \end{aligned}$$

Setzen wir für  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} ,$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} ,$$

$$\text{und } c_0 = \frac{a_0}{2}$$

haben wir die Fourier-Reihe von  $f$  in einer viel einfacheren Darstellung:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} .$$

Auch die Koeffizienten  $c_k$  können wir umrechnen und erhalten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Leider sind viele Funktionen nicht periodisch. Trotzdem können wir unsere Überlegungen verwenden. Die Idee ist, nicht-periodische Funktionen als periodische Funktionen mit “unendlicher Periode” zu betrachten. Mathematisch betrachten wir also den Grenzwert für  $T \rightarrow \infty$ .

Wir schreiben unsere Fourier-Reihe ein wenig um:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k e^{ik\omega t} \cdot \omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega) e^{ik\omega t} \cdot \omega \end{aligned} \quad (20)$$

mit  $\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k$ .

Es ist  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und deshalb

$$\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Mit  $T \rightarrow \infty$  und, wenn wir  $k\omega$  durch  $\omega$  ersetzen, ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (21)$$

$\hat{f}(\omega)$  heißt *Fourier-Transformierte* zu  $f(t)$ .

Die Reihe in (20) ist eine Riemannsche Summe (vgl. Abschnitt 4.1) zur Funktion  $\hat{f}(x) e^{ixt}$  mit Zwischenstellen in  $x = k\omega$ . Die Breite der einzelnen Intervalle der betrachteten Zerlegung ist gerade  $\omega$ .

Wegen  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  haben wir  $T \rightarrow \infty \iff \omega \rightarrow 0$ . Die Zerlegung wird also immer feiner und wir erhalten das *Fourier-Integral*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Die Koeffizienten  $c_k$  geben (bei den periodischen Funktionen) die Amplituden der Oberschwingungen mit Frequenz  $k\omega$  an. Analog gibt die Fourier-Transformierte  $\hat{f}(\omega)$  die Amplitude der Frequenz  $\omega$  an und stellt das *Frequenzspektrum* von  $f$  dar.

In der Praxis bedeutet das: während  $f(t)$  die Funktion, z.B. ein Signal, in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  angibt (“Zeitdomäne”), stellt die Fourier-Transformierte in (21) das Signal in Abhängigkeit von den Frequenzen  $\omega$  dar (“Frequenzdomäne”).

**7.0.2 Beispiel** Betrachten wir eine Funktion  $f(t)$ , die z.B. ein gemessenes Signal darstellt, und die zugehörige Fourier-Transformierte  $\hat{f}(\omega)$  (Abb. 46).

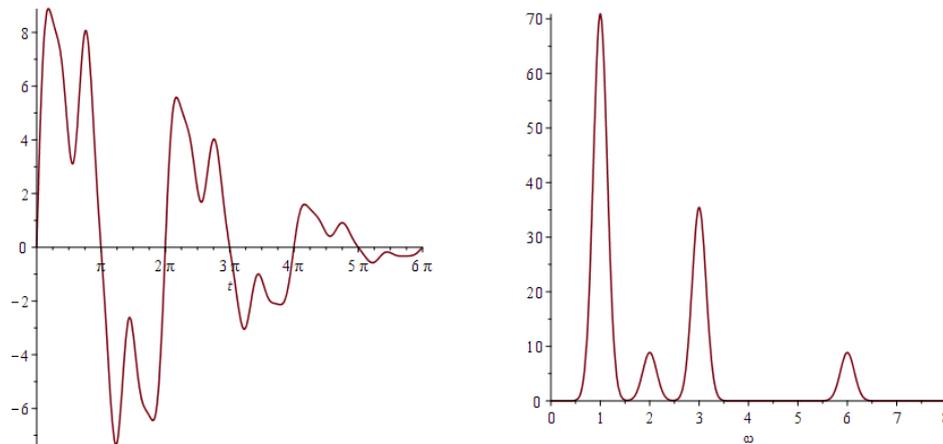


Abbildung 46: Signal  $f(t)$  und zugehörige Fouriertransformierte  $|\hat{f}(\omega)|$

Man erkennt an der Fourier-Transformierten aus welchen Frequenzen sich das Signal zusammensetzt: Offenbar treten neben der Grundfrequenz  $\omega$  (hier  $\omega = 1$ ) die Oberschwingungen  $2\omega$ ,  $3\omega$  und  $6\omega$  auf.

Tatsächlich ist im Beispiel aus Abb. 46

$$f(t) = (8 \sin t + \sin(2t) + 4 \sin(3t) + \sin(6t)) \cdot e^{-t^2/100} .$$

Auch die Amplituden der einzelnen Frequenzen sind im Graph von  $\hat{f}(\omega)$  gut zu erkennen.

# Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen . . . . .	2
1.1	Zahlmengen . . . . .	2
1.2	Komplexe Zahlen . . . . .	3
1.3	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	3
1.4	Die Gaußsche Zahlenebene . . . . .	5
1.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen . . . . .	5
1.6	Summen . . . . .	7
1.7	Der Betrag . . . . .	7
1.8	Folgen . . . . .	9
1.9	Konvergenz . . . . .	10
1.10	Konvergenz- und Divergenzkriterien . . . . .	13
1.11	Die Eulersche Zahl . . . . .	14
2	Funktionen . . . . .	17
2.1	Funktionen und Graphen . . . . .	17
2.2	Wichtige Funktionen . . . . .	18
2.3	Polarkoordinaten . . . . .	24
2.4	Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .	25
2.5	Komplexe Wurzeln . . . . .	26
2.6	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	28
2.7	Stetigkeit . . . . .	30
2.8	Umkehrfunktionen . . . . .	31
2.9	Logarithmische Skalen . . . . .	34
3	Differenzialrechnung . . . . .	37
3.1	Differenzierbarkeit . . . . .	37
3.2	Ableitungsregeln . . . . .	39
3.3	Extremwerte . . . . .	42
3.4	Die Regeln von de l'Hospital . . . . .	45
3.5	Das Newton-Verfahren . . . . .	46

4	Integralrechnung . . . . .	50
4.1	Integrierbarkeit . . . . .	50
4.2	Rechnen mit Integralen . . . . .	53
4.3	Integral- und Differenzialrechnung . . . . .	53
4.4	Partielle Integration . . . . .	57
4.5	Substitutionsregel . . . . .	58
4.6	Uneigentliche Integrale . . . . .	61
5	Reihen . . . . .	65
5.1	Summen und Reihen . . . . .	65
5.2	Konvergenzkriterien . . . . .	68
5.3	Potenzreihen . . . . .	71
5.4	Approximation von Funktionen und Taylor-Reihen . . . . .	73
5.5	Taylor-Reihen und Integration . . . . .	75
6	Integration rationaler Funktionen . . . . .	77
6.1	Fall 1: $\deg(P) \geq \deg(Q)$ . . . . .	77
6.2	Fall 2: $\deg(P) < \deg(Q)$ . . . . .	78
6.3	Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen . . . . .	81
7	Exkurs: Fourier-Reihen . . . . .	83

---

Die Abbildungen 14 (Seite 20), 26 und 27 (Seite 35) sind Spiegel Online (2020) entnommen.  
Die Daten zu SARS-CoV2-Infektionen in Abschnitt 2.2.2 (Seite 20) stammen von Johns Hopkins CSSE (2020).



Dieser Text ist unter einer Creative Commons 4.0-Lizenz (Namensnennung, nicht kommerziell, keine Bearbeitungen) lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>