

gilt

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^m}}_{\geq \frac{1}{2}} \\
 &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{-mal}} \\
 &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.
 \end{aligned}$$

Die harmonische Reihe ist also divergent (obwohl die Summanden $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergieren).

5.2 Konvergenzkriterien

Wir haben ein Kriterium für Divergenz. Es gibt aber auch einige nützliche Kriterien für die Konvergenz von Reihen:

5.2.1 Satz (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Ist $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.2 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3}$

Für $k \geq 1$ haben wir

$$\left| \frac{k+1}{2k^3} \right| = \frac{k+1}{2k^3} = \frac{k}{2k^3} + \frac{1}{2k^3} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^3} \leq \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2k^3}$.

Analog zum Majorantenkriterium für Konvergenz gibt es auch ein Divergenzkriterium:

5.2.3 Satz (Minorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt für reelle Summanden $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.4 Beispiel Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Für $k \geq 1$ gilt $k \geq \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert nach

dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Während Majoranten- und Minorantenkriterium oft sehr hilfreich sind, benötigt man zu deren Anwendung aber Reihen zum Vergleich, deren Konvergenzverhalten bereits bekannt ist. Die folgenden Kriterien benötigen keine Vergleichsreihen:

5.2.5 Satz (Quotientenkriterium) Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1.$$

5.2.6 Beispiele (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Für $k \geq 1$ gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1) \cdot 2^k}{2^{k+1} \cdot k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{k}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Damit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} < 1,$$

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ ist nach dem Quotientenkriterium also konvergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

Wir haben

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot k^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k.$$

Nach Definition 1.11.3 ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e > 1,$$

dem Quotientenkriterium zufolge ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ also divergent.

5.2.7 Satz (Wurzelkriterium)

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergiert, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

5.2.8 Beispiel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Es gilt $\sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \sqrt[k]{k} \cdot \frac{1}{2}$.

Wegen $\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{\frac{1}{k} \ln k}$ und da nach der Regel von de l'Hospital $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, haben wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{k} \ln k} = e^{\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} \right)} = e^0 = 1. \quad (14)$$

Also ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1$ und nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

Ein letztes Kriterium gilt nur für einen bestimmten Reihentyp. Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit

$a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k heißen *alternierende Reihen*: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$

5.2.9 Satz (Leibniz-Kriterium) Eine alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k ist konvergent, wenn

- (1) (a_k) monoton fällt und
- (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

5.2.10 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe also konvergent.

5.3 Potenzreihen

Ein besonders wichtiger Typ von Reihen ist die Potenzreihe:

5.3.1 Definition Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ heißt *Potenzreihe*.

5.3.2 Beispiel Mit $z_0 = 0$ und $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen hängt, wie bei der geometrischen Reihe, davon ab, welchen Wert z hat. Genauer gilt:

5.3.3 Satz Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gibt es ein $R \geq 0$ oder $R = \infty$, so dass die Reihe konvergiert, wenn $|z - z_0| < R$ und divergiert, wenn $|z - z_0| > R$.

5.3.4 Bemerkung Eine Potenzreihe konvergiert folglich im Inneren eines Kreises um z_0 mit Radius R und divergiert außerhalb dieses Kreises. R heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Betrachten wir nur reelle Zahlen, konvergiert die Reihe im *Konvergenzintervall* $]z_0 - R, z_0 + R[$ und ist für $z > z_0 + R$ und für $z < z_0 - R$, divergent.

Ist $R = \infty$, dann konvergiert die Reihe für alle komplexen bzw. reellen Zahlen.

Für $|z - z_0| = R$ kann die Reihe konvergieren oder divergieren. Der Satz macht über diese Fälle keine Aussage.

5.3.5 Beispiel Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert, wie wir bereits berechnet haben, für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| \geq 1$. Hier ist also der Konvergenzradius $R = 1$.

Der Konvergenzradius kann in vielen Fällen relativ einfach berechnet werden:

5.3.6 Satz Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gilt, sofern die Grenzwerte existieren,

$$(1) \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$(2) \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

5.3.7 Beispiele (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

Hier ist $a_k = \frac{k!}{k^k}$ und $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! \cdot (k+1)^{k+1}}{k^k \cdot (k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k (k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e, \end{aligned}$$

es ist also $R = e$, die Reihe konvergiert daher für komplexe Zahlen z mit $|z| < e$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > e$.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (2z)^k$

Hier haben wir $a_k = k \cdot 2^k$ und $z_0 = 0$.

Nach (14) (Seite 70) ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ und damit gilt dann

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k} \cdot 2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{2^k}} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert also in einem Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$.

Potenzreihen konvergieren also in einem Kreis um z_0 bzw. im Konvergenzintervall. In diesen Bereichen stellt die Potenzreihe daher eine Funktion dar:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Für die Eigenschaften einer solchen Funktion gilt:

5.3.8 Satz Sei⁶ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt:

- (1) (*gliedweise Differenziation*) f ist differenzierbar (und damit auch stetig) im Konvergenzbereich mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k (x - x_0)^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k (x - x_0)^{k-1}.$$

- (2) (*gliedweise Integration*) f ist integrierbar und hat Stammfunktionen

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C \quad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Die Potenzreihen $f'(z)$ und $\int f(x) dx$ haben ebenfalls den Konvergenzradius R .

⁶Wir hatten Integrale nur im Reellen betrachtet, daher formuliere ich dies auch nur für reelle Potenzreihen. Die Aussagen gelten aber mutatis mutandis auch in $\mathbb{C}$.

5.4 Approximation von Funktionen und Taylor-Reihen

Potenzreihen stellen nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts also Funktionen dar. Wie wir nun sehen werden, können aber auch oft umgekehrt Funktionen als Potenzreihen dargestellt werden. Da Potenzreihen recht einfache Objekte sind, kann das sehr nützlich sein.

Bevor wir zu einer gegebenen Funktion die sie darstellende Potenzreihe konstruieren können, untersuchen wir zuerst die Approximation einer Funktion durch ein Polynom. Die Idee dahinter: je höher der Grad des Polynoms, desto genauer soll die Funktion approximiert werden. Wird der Grad „unendlich hoch“, wird aus den Polynomen eine Potenzreihe und diese könnte dann die gleichen Werte wie die Funktion haben.

5.4.1 Bemerkung Der Einfachheit halber formuliere ich diese Überlegungen nur in den reellen Zahlen. Im Prinzip funktioniert das Folgende auch im Komplexen.

5.4.2 Definition Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei f auf $[a, b]$ n -mal differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in [a, b]$. Dann heißt das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

n -tes Taylor-Polynom von f zum Entwicklungspunkt x_0 .

Tatsächlich sind diese Polynome zur Approximation von Funktionen geeignet:

5.4.3 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \ln x$ und als Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Offensichtlich ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{f(1)}{0!} (x - 1)^0 = \ln 1 = 0 \\ T_1(x) &= T_0(x) + \frac{f'(1)}{1!} (x - 1)^1 = x - 1 \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(1)}{2!} (x - 1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2} (x - 1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{3}{2} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

In der Nähe von x_0 ist dies tatsächlich eine gute Näherung an $f(x)$:

$$\begin{aligned} \ln(1.1) &\approx 0.09531 & \text{und} & & T_0(1.1) &= 0 \\ & & & & T_1(1.1) &= 0.1 \\ & & & & T_2(1.1) &= 0.095 \end{aligned}$$

Bereits das zweite Taylorpolynom liefert den Wert $\ln(1.1)$ also auf drei Nachkommastellen. In größerer Entfernung vom Entwicklungspunkt wird die Näherung aber schlechter:

$$\begin{aligned} \ln(1.9) &\approx 0.64185 & \text{und} & & T_0(1.9) &= 0 \\ & & & & T_1(1.9) &= 0.9 \\ & & & & T_2(1.9) &= 0.495 \end{aligned}$$

Diese Beobachtung ist typisch: In der Nähe des Entwicklungspunkts sind Taylorpolynome oft schon für kleine n eine gute Näherung. Je weiter wir uns von x_0 entfernen, desto schlechter wird die Näherung. n muss dann erhöht werden, um eine bessere Approximation zu erhalten.

Mit $n \rightarrow \infty$ wird aus einem Taylor-Polynom eine Reihe:

5.4.4 Definition $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe* von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 .

5.4.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = e^x$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Es ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und damit $f^{(k)}(x_0) = 1$ für alle k . Die Taylorpolynome von e^x zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sind also

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k .$$

Beispielsweise haben wir für $n = 4$

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 .$$

Dieses Polynom soll also eine Näherung für e^x darstellen.

Probieren wir es z.B. für $x = 2$ aus:

n	$T_n(2)$
4	7.0
8	7.387302
12	7.389056
$e^2 \approx 7.389056$	

Bereits das Taylor-Polynom 12. Grades berechnet e^2 also auf 6 Nachkommestellen genau.

5.4.6 Satz (Exponentialreihe) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die folgende Reihe konvergent und es gilt

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k .$$

5.4.7 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \cos x$. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ &\vdots \end{aligned}$$

und damit $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$ usw.

Allgemein gilt $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$ und $f^{(2m+1)}(0) = 0$. Die Taylor-Reihe des Cosinus ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} \cdot x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \cdot x^{2m} .$$

Auch diese Reihe konvergiert für alle x gegen $\cos x$:

Die *Cosinusreihe* ist die Darstellung des Cosinus als Potenzreihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} .$$

Ganz analog erhält man die *Sinusreihe*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} .$$

Diese Reihen konvergieren nicht nur für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern für alle komplexen Zahlen. Dies verwendet man, um *komplexe* Sinus- und Cosinusfunktionen zu definieren:

5.4.8 Definition Für alle komplexen Zahlen z ist

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

5.5 Taylor-Reihen und Integration

Eine Anwendung der Taylor-Entwicklung ist die Berechnung von Funktionen, die mit anderen Techniken nicht oder nur sehr schwer zu berechnen sind.

Betrachten wir beispielsweise die *Fehlerfunktion* (*error function*)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Diese Funktion spielt als Verteilungsfunktion der Gaußverteilung z.B. bei der Auswertung von Messreihen oder als Lösung der Wärmeleitungsgleichung eine wichtige Rolle.

Der Integrand e^{-t^2} ist stetig, also auch integrierbar, hat aber keine Stammfunktion! Eine Berechnung des Integrals über Stammfunktionen ist somit nicht möglich.

Unter Verwendung der Exponentialreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ erhalten wir aber

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot t^{2k} .$$

Damit folgt nun durch gliedweise Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot t^{2k} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

und hiermit ist zumindest eine näherungsweise Berechnung der Fehlerfunktion möglich.