4.5.3 Beispiele **(1)** $\displaystyle\int_0^1 (1+2t)^2\,dt = ?$

Hier verwenden wir die Substitutionsregel „von rechts nach links", um die innere Funktion $1+2t$ durch x zu ersetzen und so ein eventuell einfacheres Integral zu erhalten:

Wir wählen $x(t) = 1+2t$ und $\alpha = 0$ sowie $\beta = 1$. Damit ist dann $a = x(\alpha) = 1$, $b = x(\beta) = 3$ und $x'(t) = 2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\underbrace{1+2t}_{=x(t)})^2\,dt &= \int_0^1 (x(t))^2 \cdot \underbrace{x'(t) \cdot \overbrace{\frac{1}{x'(t)}}^{=\frac{1}{2}}}_{=1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t))^2 x'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 \qquad (12)\\
&= \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}\ .
\end{aligned}$$

Indem wir also die innere Funktion durch x substituieren, soll sich der Integrand vereinfachen. Allerdings benötigen wir dafür den Faktor $x'(t)$ unterhalb des Integrals.

In (12) haben wir $\displaystyle\int_0^1 (1+2t)^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3$ errechnet, $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}$ ist aber *keine Stammfunktion* des Integranden!

Um nach Verwendung der Substitutionsregel eine Stammfunktion zu erhalten, müssen wir *resubstituieren*, also die Variable x wieder durch $1+2t$ ersetzen:

$$\int (1+2t)^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{(1+2t)^3}{6} + C\ .$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = ?$

Hier empfiehlt es sich, die Substitutionsregel „von links nach rechts" zu benutzen: Wir können x durch $x(t) = \sqrt{t-1}$ ersetzen, der Nenner des Integranden vereinfacht sich dadurch (denn es gilt $1+x^2 = 1+(\sqrt{t-1})^2 = 1+t-1 = t$) und wir können das Integral berechnen.

Bei der Substitution verändert sich das Integrationsintervall:

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{\alpha-1} &\quad\Rightarrow\quad& \alpha = 1\\
1 &= \sqrt{\beta-1} &\quad\Rightarrow\quad& \beta = 2
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir also, da $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_1^2 \frac{x(t)}{\sqrt{1+(x(t))^2}} \cdot x'(t)\,dt \\
&= \int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{t-1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-1/2}\,dt \\
&= t^{1/2}\Big|_1^2 \\
&= \sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

(3) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Radius 1 bestimmen.

Wie wir wissen, ist der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ein Halbkreis mit Radius 1 (vgl. Abb. 6 auf Seite 17). Wir müssen also

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

berechnen. Hier müssen wir bei der Wahl der Substitution etwas „kreativer“ sein. Nach Satz 2.2.3 ist $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, also $1 - (\sin t)^2 = (\cos t)^2$. Um den Integranden zu vereinfachen, verwenden wir daher die Substitution $x(t) = \sin t$.

Es ist dann $x'(t) = \cos t$ sowie $x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, also unter Verwendung von Gleichung (10) auf Seite 58

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-(\sin t)^2}}_{=\sqrt{(\cos t)^2}} \cdot \cos t\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

Die Fläche eines Kreises mit Radius 1 ist das Doppelte dieses Halbkreises, also π.

4.6 Uneigentliche Integrale

Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ können wir bislang nur berechnen, wenn der Integrand $f(x)$ beschränkt und das Integrationsintervall $[a,b]$ endlich ist. Andernfalls würde unsere Definition des Integrals zu keinem Ergebnis führen, da die Riemannschen Summen unter Umständen unendlich groß würden.

Durch Grenzwerte können wir die bisherige Definition aber verallgemeinern. Betrachten wir zuerst den Fall, dass der Integrand an einem Ende des Integrationsintervalls nicht definiert ist:

4.6.1 Definition Sei f integrierbar in jedem Intervall $[a,b]$ mit $b < B$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b\to B}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^B f(x)\,dx \ ,$$

dann heißt f in $[a,B]$ *uneigentlich integrierbar*.

4.6.2 Bemerkung Ganz analog wird $\int_A^b f(x)\,dx = \lim_{a\to A}\int_a^b f(x)\,dx$ für Funktionen f, die in jedem $[a,b]$ mit $a > A$ integrierbar sind, definiert.

4.6.3 Bemerkung $f(B)$ bzw. $f(A)$ muss hier gar nicht definiert sein. Über $[a,B]$ bzw. $[A,b]$ sind die Funktionen dann nicht (*eigentlich*) integrierbar, sondern nur uneigentlich integrierbar.

4.6.4 Beispiele **(1)** $\int_0^1 \ln x\,dx$

Der Integrand ist in 0 nicht definiert. $\ln x$ ist aber stetig und damit integrierbar in $[a,1]$ für $a > 0$. Die Stammfunktion von $\ln x$ haben wir auf Seite 57 bereits berechnet, wir haben also für $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_a^1 \ln x\,dx &= (x\ln x - x)\Big|_a^1 \\ &= 0 - 1 - a\ln a + a \ ,\end{aligned}$$

also unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{a\to 0}(-1 - a\ln a + a) \\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{a}} + 0 \\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} \\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\left(-\frac{a^2}{a}\right) \\ &= -1 - \lim_{a\to 0}(-a) \\ &= -1\end{aligned}$$

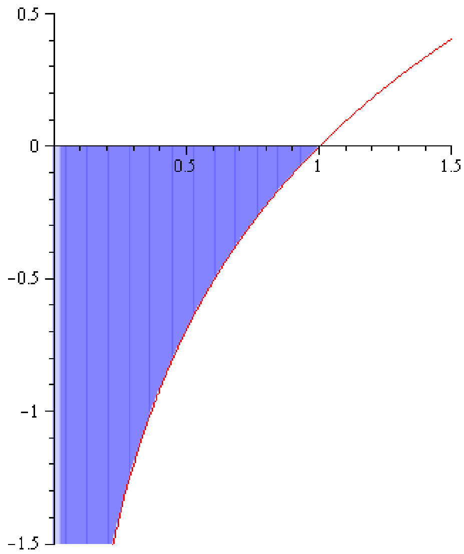

Abbildung 42: $\int \ln x \, dx$: Die markierte Fläche hat den Inhalt 1.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$

Auch hier ist der Integrand in 0 nicht definiert aber für $a > 0$ integrierbar. Für $a > 0$ gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \Big|_a^1 = 0 - \ln|a| \ .$$

Da aber $\lim\limits_{a \to 0}(-\ln|a|) = \infty$, existiert $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$ nicht. $\frac{1}{x}$ ist also in $[0, 1]$ auch nicht uneigentlich integrierbar.

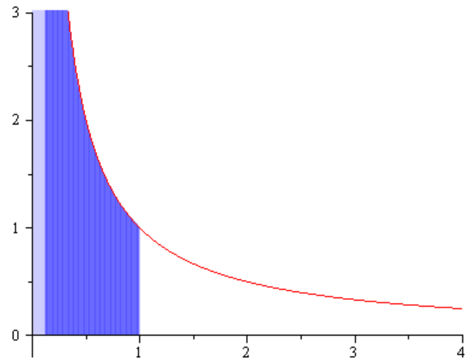

Abbildung 43: $\int \frac{1}{x} \, dx$: Die markierte Fläche ist unendlich groß.

So, wie wir den Integralbegriff auf Funktionen erweitert haben, die nicht beschränkt oder auf den Integralgerenzen nicht definiert sind, können wir ihn auch auf unbeschränkte Integrationsintervalle ausdehnen:

4.6.5 Definition Sei f uneigentlich integrierbar in jedem Intervall $[a,b]$ mit $a < b < \infty$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\ ,$$

dann heißt f *uneigentlich integrierbar* in $[a,\infty[$.

4.6.6 Bemerkung Analog wird $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ definiert.

4.6.7 Bemerkung Ist eine Funktion f für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl in $]-\infty,c]$ als auch in $[c,\infty[$ uneigentlich integrierbar, so schreiben wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\ .$$

4.6.8 Beispiele **(1)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Für $b > 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

und damit

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1\ .$$

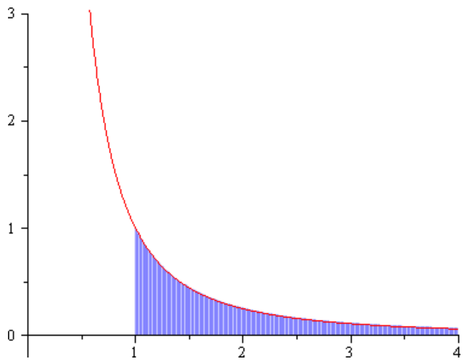

Abbildung 44: $\int \frac{1}{x^2}\,dx$: Die markierte Fläche ist endlich, der Flächeninhalt ist 1.

(2) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Für $b > 1$ gilt hier

$$\int\limits_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

und wegen

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

existiert $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

5 Reihen

5.1 Summen und Reihen

Vereinfacht ausgedrückt, sind *Reihen* Summen unendlich vieler Summanden. Wenn aber unendlich viele Werte addiert werden, kann der Wert dieser Summe auch unendlich groß werden und dadurch gar nicht existieren.

Bei manchen Summen ist ihr Wert, oder sogar die Existenz des Wertes, unklar:

$$
\begin{gathered}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\,?\\
1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\,?\\
1-1+1-1+1-1\pm\cdots=\,?\\
i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+\cdots=i-1-i+1+i+\cdots=\,?\\
1+2+3+4+\cdots=\,?
\end{gathered}
$$

Bei solchen „unendlichen Summen“ müssen wir also offensichtlich Grenzwerte betrachten, wie wir sie von Folgen bereits kennen:

5.1.1 Definition Die Folge (s_n) der *Partialsummen*

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1\\
s_2 &= a_1+a_2\\
s_3 &= a_1+a_2+a_3\\
&\ \vdots\\
s_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

heißt *Reihe* über a_k und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Die Reihe heißt *konvergent* zur Summe S, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_i = S$. Nicht konvergente Reihen heißen *divergent*.

5.1.2 Bemerkung Die Reihe muss nicht bei $k=1$, sondern kann bei jeder ganzen Zahl beginnen: Analog zu Definition 5.1.1 definiert man $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ für $m \in \mathbb{Z}$.

5.1.3 Bemerkung Das Konvergenzverhalten (Konvergenz oder Divergenz) einer Reihe ändert sich nicht, wenn endlich viele Summanden geändert, weggelassen oder hinzugefügt werden. Wenn die Reihe konvergiert, ändert sich lediglich der Wert der Reihe.

5.1.4 Beispiele **(1)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots = ?$

Die Partialsummenfolge lautet hier $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, diese Folge, und damit auch die Reihe, ist divergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

entspricht der Partialsummefolge $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

Diese Folge divergiert gegen Unendlich, es gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$.

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = ?$

Es ist $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{(k-1)k}$ und daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (13) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \ .$$

Die Reihe ist also konvergent und konvergiert gegen den Wert 1.

(4) Wie wir dies auch von Folgen kennen, ist die Berechnung des Wertes einer Reihe oft sehr viel schwieriger, als „nur“ zu entscheiden, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$: Da alle Summanden $\frac{1}{k^2}$ positiv sind, gilt für die Partialsummen $s_{n+1} > s_n$, die Folge (s_n) ist also streng monoton wachsend.

Weiter ist nach (13)

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot k} \\ &\le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &< 2 \end{aligned}$$

(s_n) ist also auch nach oben beschränkt. Nach dem Monotonieprinzip (Satz 1.10.3) folgt daher:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent.}$$

Wir wissen nun also, dass diese Reihe gegen einen Wert konvergiert, welchen Wert die Reihe hat, können wir aber nicht sagen.[5]

[5] Mit Methoden, die über den Stoff dieser Veranstaltung hinausgehen, kann man $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zeigen.

Obwohl unendlich viele positive Werte addiert werden, wächst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ also nicht „ins Unendliche". Möglich ist das nur, weil die addierten Werte immer kleiner werden, die Summanden also gegen Null konvergieren:

5.1.5 Satz Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dieser Satz gibt uns ein Kriterium, wann eine Reihe *nicht* konvergiert:

Ist $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ oder divergiert die Folge der Summanden (a_k), dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

5.1.6 Beispiel Eine oft betrachtete Reihe ist die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für ein $z \in \mathbb{C}$.

1. Fall: $|z| \geq 1$
Wie wir in 1.9.5 (3) gesehen haben, konvergiert (z^k) nicht oder nicht gegen 0, wenn $|z| \geq 1$. Die geometrische Reihe ist also divergent für $|z| \geq 1$.

2. Fall: $|z| < 1$
Nach Satz 1.6.3 über die geometrische Summe ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \ .$$

Da $\lim_{k\to\infty} z^k = 0$ für $|z| < 1$, folgt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} \ .$$

Zusammenfassend gilt also:

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist divergent für $|z| \geq 1$ und konvergiert für $|z| < 1$ gegen $\frac{1}{1-z}$.

Satz 5.1.5 ist kein Kriterium für die Konvergenz einer Reihe: Auch, wenn die Summanden gegen 0 konvergieren, kann die Reihe divergieren.

5.1.7 Beispiel Eine der wichtigsten Reihen ist die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Wählen wir, um die folgende Rechnung etwas zu vereinfachen, eine ganze Zahl m so, dass m die größte Zahl mit $2^m \leq n$ ist. Mit $n \to \infty$ gilt offensichtlich auch $m \to \infty$. Für die Partialsummen