mit beliebigen Zwischenstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Es gilt

$$\begin{aligned} I_Z &= \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) \\ &= c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 \pm \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(-x_0 + x_n) \\ &= c(b - a) \end{aligned}$$

Da $I_Z = c(b-a)$ für beliebige Z und z_i, folgt

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\|Z\| \to 0} I_Z = c(b-a) \ .$$

(2) Betrachten wir die *Dirichlet-Funktion*

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{, falls } x \text{ irrational} \end{cases} \qquad \text{mit } D(\delta) = [0,1].$$

Sei Z eine Zerlegung von $[a,b] = [0,1]$. In jedem Teilintervall gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Wählen wir zuerst *rationale* Zwischenstellen z_i: Analog zum letzten Beispiel rechnen wir

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta(z_i)}_{=1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a = 1 \ .$$

Andererseits gilt für *irrationale* Zwischenstellen z_i

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta(z_i)}_{=0}(x_i - x_{i-1}) = 0 \ .$$

Die Riemannschen Summen I_Z konvergieren also nicht, $\delta(x)$ ist folglich nicht integrierbar.

Wir sehen an diesem Beispiel, wie wichtig es ist, *alle* Zerlegungen und *alle* Zwischenstellen zu betrachten.

Außerdem sehen wir, dass es Funktionen gibt, die nicht integrierbar sind.

Da das Zerlegungsverfahren in der Praxis sehr aufwändig ist, benötigen wir einfachere Kriterien, um integrierbare Funktionen zu erkennen. Es gilt:

4.1.4 Satz **(1)** Jede auf $[a,b]$ monotone und beschränkte Funktion ist in $[a,b]$ integrierbar.

(2) Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist in $[a,b]$ integrierbar.

4.2 Rechnen mit Integralen

Bisher haben wir Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ nur für $a < b$ definiert. Wir erweitern die Definition:

4.2.1 Definition Sei f in $[a,b]$ integrierbar. Es sei

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0\ .$$

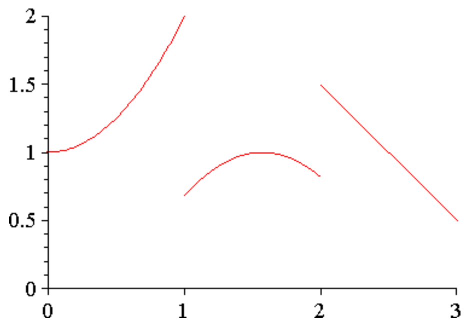
Darüber hinaus gilt:

4.2.2 Satz Eine Funktion f ist in $[a,b]$ genau dann integrierbar, wenn f für jedes $c \in [a,b]$ in $[a,c]$ *und* $[c,b]$ integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Eine Folgerung aus diesem Satz ist sehr nützlich: Jede *abschnittsweise stetige* Funktion ist integrierbar.

Da eine solche Funktion in Teilintervallen stetig ist, ist sie dort jeweils integrierbar. Nach Satz 4.2.2 ist dann auch die Funktion auf dem gesamten Intervall integrierbar und ihr Integral ist die Summe der Integrale über die einzelnen Stetigkeitsintervalle.



Satz 4.2.2 sagt uns also, dass sich Integrale addieren, wenn die Integrationsintervalle aneinander gehangen werden. Wir können aber auch mit den Integranden „rechnen“:

4.2.3 Satz Seien f und g integrierbar in $[a,b]$ und sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann sind

$$c \cdot f(x) \qquad \text{und} \qquad f(x) \pm g(x)$$

integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

4.3 Integral- und Differenzialrechnung

Man kann ein Integral auch als „Funktion der oberen Grenze“ auffassen:

Wenn f in $[a,b]$ integrierbar ist, dann ist f nach Satz 4.2.2 auch in allen Intervallen $[a,x]$ mit $x \in [a,b]$ integrierbar. Sei

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Mit dieser Funktion φ gilt folgender Zusammenhang zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung:

4.3.1 Satz Ist f stetig (und damit auch integrierbar) in $[a, b]$, dann ist $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar auf $[a, b]$ mit

$$\varphi'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Diesen Satz können wir zur Berechnung von Integralen nutzen (und so vermeiden, Zerlegungen betrachten zu müssen). Zuerst eine Begriffsbestimmung:

4.3.2 Definition Sei f definiert in $[a, b]$. Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* von f, wenn auf $[a, b]$

$$F'(x) = f(x) \ .$$

4.3.3 Beispiel Nach dem letzten Satz ist φ also eine Stammfunktion von f, da $\varphi'(x) = f(x)$.

4.3.4 Notation Man schreibt Stammfunktionen symbolisch als *unbestimmtes Integral*:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

4.3.5 Bemerkung Wenn eine Funktion eine Stammfunktion hat, dann hat sie auch unendlich viele verschiedene Stammfunktionen.

Sei nämlich F eine Stammfunktion von f, dann ist für beliebige Konstanten $c \in \mathbb{R}$

$$(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = f(x) + 0 = f(x) \ ,$$

$F(x) + c$ ist also auch eine Stammfunktion.

Insbesondere macht es keinen Sinn, von *der* Stammfunktion zu sprechen, da es immer unendlich viele Stammfunktionen gibt.

Auch die Umkehrung der letzten Bemerkung gilt:

4.3.6 Satz Alle Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, d.h. sind F und G Stammfunktionen von f, dann gilt $F(x) - G(x) = c$.

Ist F eine Stammfunktion von f, gilt also

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \ .$$

Wie können wir Stammfunktionen nutzen, Integrale auszurechnen ?

Betrachten wir eine integrierbare Funktion f mit einer Stammfunktion F. Da auch φ Stammfunktion von f ist und sich alle Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, gilt für ein $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \varphi(x) + c = \int\limits_a^x f(t)\,dt + c \ .$$

Speziell für $x = a$ gilt

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c$$

und damit

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c = \int_a^b f(t)\,dt + F(a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

Wir haben also das folgende wichtige Resultat:

4.3.7 Satz (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)
Sei f eine integrierbare Funktion in $[a, b]$ mit einer Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b\ .$$

Der große Vorteil dieses Satzes ist, dass wir nun leicht Integrale berechnen können, wenn wir eine Stammfunktion kennen. Stammfunktionen wiederum können wir über unser Wissen über Ableitungen erhalten:

4.3.8 Beispiele **(1)** $\int_0^1 x\,dx = ?$

Wir wissen $\left(x^2\right)' = 2x$, also $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$. Daher ist

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}\ .$$

(2) Da $(x)' = 1$, gilt

$$\int_{-2}^2 1\,dx = x\Big|_{-2}^2 = 2 - (-2) = 4\ .$$

(3) Wegen $(\cos x)' = -\sin x$ ist

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - (\underbrace{-\cos 0}_{=1}) = 1\ .$$

Natürlich kann man auf diese Weise allgemein Stammfunktionen (statt bestimmten Integralen) berechnen:

4.3.9 Beispiele **(1)** $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (s.o., Bsp. 3)

(2) $\int c\,dx = cx + C$, da $(cx)' = c$.

(3) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, denn wir haben

$$\left(x^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)x^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$$

(4) Wir wissen, dass $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ für $x > 0$. Also gilt für $x > 0$

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

und für $x < 0$

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \ .$$

Es gilt also

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0,$$

das heißt, es gilt

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| \Big|_a^b \qquad \text{wenn } 0 \notin [a,b].$$

Das letzte Beispiel können wir verallgemeinern: Mit einer Fallunterscheidung wie oben kann man unter Verwendung der Kettenregel nachrechnen, dass

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{für } f(x) \neq 0.$$

Damit haben wir:

4.3.10 Satz Sei $f(x) \neq 0$ in $[a,b]$ und $f'(x)$ stetig auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C \ .$$

4.3.11 Beispiel

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx &= \ln|1+x| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

4.3.12 Bemerkung Nicht jede integrierbare Funktion hat eine (geschlossen darstellbare) Stammfunktion.

Es gibt Funktion, deren Integral man berechnen kann, die aber keine Stammfunktion haben, die man nicht anders als z.B. durch $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ darstellen kann (was zur praktischen Berechnung nicht viel hilft). Zur Berechnung der Integrale müssen dann Riemannsche Summen oder andere Verfahren benutzt werden.

4.3.13 Beispiel $f(x) = e^{x^2}$ ist stetig, also integrierbar, das Integral darüber kann man somit berechnen. Beispielsweise ist $\int\limits_0^1 e^{x^2}\, dx \approx 1.46265$. Eine Stammfunktion kann man aber nicht angeben.

Weitere Beispiele für solche Funktionen ohne Stammfunktionen sind

$$\frac{1}{\ln x} \quad , \quad \frac{\sin x}{x} \quad , \quad \frac{e^x}{x} \quad , \quad \ldots \ .$$

4.4 Partielle Integration

Zwei Integrationsregeln kennen wir bereits: Satz 4.2.2 und Satz 4.3.10. Satz 4.2.2 sagt, dass mit zwei Funktionen auch deren Summe oder Differenz integrierbar sind. Das gleiche gilt auch für das Produkt zweier integrierbarer Funktionen, eine Formel für das Integral ist aber nicht so einfach anzugeben:

4.4.1 Satz (partielle Integration) Seien f und g differenzierbar in $[a, b]$ mit stetigen Ableitungen. Es gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .$$

4.4.2 Beispiele **(1)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x\,dx = ?$

Wählen wir hier $f'(x) = \cos x$ ($\Rightarrow$ $f(x) = \sin x$) und $g(x) = x$ ($\Rightarrow$ $g'(x) = 1$), erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x\,dx &= \sin x \cdot x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot 1\,dx \\ &= x \cdot \sin x\Big|_0^{\pi/2} - (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - 0 + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos 0}_{=1} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\ .\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = ?$

Auf den ersten Blick ist dies kein Kandidat für eine partielle Integration, da es sich nicht um ein Produkt handelt. Wir verwenden aber einen simplen Trick:

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x\,dx \qquad &(\text{wir wählen } f'(x) = 1 \text{ und } g(x) = \ln x) \\ = x \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}\,dx & \\ = x \cdot \ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e & \qquad (8) \\ = e\ln e - 1\ln 1 - e + 1 & \\ = e - e + 1 & \\ = 1 &\end{aligned}$$

(3) Auch unbestimmte Integrale, also Stammfunktionen, lassen sich mit partieller Integration berechnen: Nach (8) gilt nämlich

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C\ .$$

WS 24/25
6. Dezember 2024
Rev: 14022

(4)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\,dx &= \sin x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin x\cdot\sin x}_{=(\sin x)^2=1-(\cos x)^2}\,dx\\ &= \sin x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1\,dx - \int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx\\ &= \sin x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx\end{aligned}$$

Anscheinend sind wir hier im Kreis gelaufen und haben wieder das Ausgangsintegral erhalten. Wir können die Gleichung aber umformen, indem wir auf beiden Seiten $\int_0^{\pi/2}(\cos x)^2 dx$ addieren und erhalten

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx = \sin x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} + x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}\ .$$

Eine Stammfunktion haben wir in (9) gefunden, nämlich

$$\int (\cos x)^2\,dx = \frac{1}{2}(\sin x\cdot\cos x + x) + C \tag{10}$$

4.5 Substitutionsregel

Während die partielle Integration der Produktregel für Ableitungen entspricht, entspricht die Substitutionsregel der Kettenregel:

4.5.1 Satz Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und die Funktion $x(t)$ habe auf $[\alpha,\beta]$ eine stetige Ableitung mit

$$x(\alpha)=a \quad , \qquad x(\beta)=b \quad , \qquad x(t)\in[a,b] \quad \text{für } t\in[\alpha,\beta]\ . \tag{11}$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\cdot x'(t)\,dt\ .$$

4.5.2 Bemerkung Die Bedingungen (11) besagen anschaulich, dass die Funktion $x(t)$ das Intervall $[\alpha,\beta]$ auf das Intervall $[a,b]$ abbildet.