

3.2.13 Beispiel Betrachten wir $f(x) = e^x$.

f ist stetig und in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ streng monoton. Außerdem ist f überall differenzierbar mit $f'(x) = e^x \neq 0$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt und wir können ihn anwenden.

$f^{-1}(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ als Umkehrfunktion von f demnach differenzierbar und es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

3.2.14 Bemerkung Betrachten wir allgemeinere Exponentialfunktionen, also $f(z) = a^z$ für ein reelles $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$a^z = (e^{\ln a})^z = e^{z \ln a}. \quad (7)$$

(Diese Überlegung ist ein gelegentlich sehr nützlicher „Rechentrick“, um solche Ausdrücke zu handhaben.)

Nach der Kettenregel gilt nun

$$(a^z)' = (e^{z \ln a})' = e^{z \ln a} \cdot \ln a = a^z \ln a.$$

Nur für $a = e$ ist $\ln a = 1$. Der Spezialfall $(e^z)' = e^z$ ist also von allen Exponentialfunktionen diejenige Funktion mit der einfachsten Ableitung! Dies erklärt die Bedeutung der Funktion e^z im Vergleich zu Exponentialfunktionen zu anderen Basen.

Mit Satz 3.2.6 können wir Funktionen der Form x^k ableiten und der „Rechentrick“ in (7) kann benutzt werden, um Funktionen abzuleiten, bei denen x im Exponenten steht. Was aber machen wir, wenn x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt? Für solche Fälle benötigen wir unsere letzte Ableitungsregel:

3.2.15 Satz (logarithmische Differenziation) Seien f und g differenzierbar auf einem Intervall $]a, b[$ mit $f(x) > 0$. Dann ist $f(x)^{g(x)}$ differenzierbar mit

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))'.$$

3.2.16 Beispiel Berechnen wir die Ableitung von $f(x) = x^x$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned} (x^x)' &= x^x (x \ln x)' \\ &= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

3.3 Extremwerte

Dieses Thema ist wohl allen noch aus der Schulzeit bekannt — wir schauen es uns einmal genauer an.

Da in den komplexen Zahlen keine Größenvergleiche möglich sind, gibt es bei komplexwertigen Funktionen keine Extremwerte, wir betrachten daher nur reelle Funktionen.

Zur Erinnerung: Wir bezeichnen mit $U_\varepsilon(a)$ eine ε -Umgebung des Punktes a (vgl. Definition 1.9.1), d.h. die Punkte, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

3.3.1 Definition Sei f eine Funktion, die auf $]a, b[$ definiert ist. f hat in $x_0 \in]a, b[$ ein

- *lokales Minimum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$,
- *lokales Maximum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Ein Minimum oder Maximum wird auch als *Extremum* bezeichnet.

Wir sprechen also von einem lokalen Maximum (Minimum), wenn der Funktionswert in einem Punkt größer (kleiner) ist, als in einer Umgebung des Punktes.

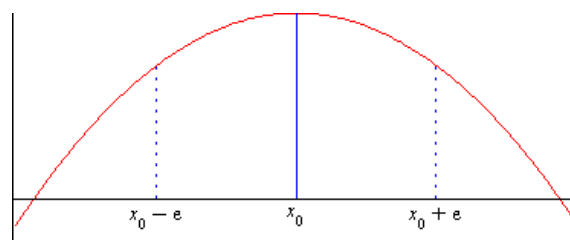


Abbildung 37: Vor dem Maximum wächst die Funktion, dahinter fällt sie

Offensichtlich wächst die Funktion auf der linken Seite eines Maximums (es ist dort also $f'(x) > 0$), auf der rechten Seite fällt die Funktion (also $f'(x) < 0$). Bei einem Minimum verhält es sich genau umgekehrt. In einem Extremum muss stets $f'(x) = 0$ gelten. Dies ist ein erstes Kriterium für das Vorliegen eines Extremums:

3.3.2 Satz (notwendiges Kriterium für Extrema) Sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

3.3.3 Beispiele (1) $f(x) = x^2$ hat in $x = 0$ bekanntlich ein Minimum. Tatsächlich gilt $f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$.

(2) $f(x) = x^3$ hat *kein* Extremum in $x = 0$. Trotzdem ist $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Ableitung auch den Wert 0 annehmen kann, obwohl kein Extremum vorliegt. Das Kriterium nennt man deshalb „notwendig“, da $f'(x) = 0$ zwar notwendig für ein Extremum ist, aber nicht hinreichend. Das Kriterium ist dennoch nützlich, wir können damit nämlich die möglichen Stellen für ein Extremum finden und diese Stellen dann näher untersuchen.

Wie wir oben gesehen haben, wächst auf der linken Seite eines Maximums die Funktion, dieses Wachstum wird aber immer geringer bis dieses Wachstum rechts des Maximums sogar negativ wird, weil die Funktion fällt.

Das Wachstum wird durch f' dargestellt, die Veränderung davon ist die Ableitung hiervon, also f'' . Dass das Wachstum immer geringer wird, bedeutet also mathematisch ausgedrückt, dass die zweite Ableitung negativ wird.

Betrachten wir ein Minimum, gilt die analoge Überlegung. Wir erhalten

3.3.4 Satz (hinreichendes Kriterium für Extrema) f sei 2-mal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

3.3.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, also ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und für $x = 2$. Dies sind also die Stellen, an denen Extrema vorliegen könnten.

Weiter ist $f''(x) = 6x - 6$, folglich $f''(0) = -6 < 0$, f hat in 0 also ein lokales Maximum.

In $x = 2$ ist $f''(2) = 6 > 0$, f hat in 2 also ein lokales Minimum.

Aber auch der letzte Satz löst das Problem, ein Extremum zu finden, noch nicht in jedem Fall:

Es ist z.B. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$, also $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, der Satz macht also keine Aussage. Tatsächlich hat x^3 in 0 kein Extremum. Dies kann man in der Situation, dass $f''(x) = 0$ gilt, aber nicht immer folgern, denn es ist auch $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$ und x^4 hat in 0 ein Minimum.

Die genauen Voraussetzungen für das Vorliegen von Minimum, Maximum oder keinem Extremum beschreibt:

3.3.6 Satz Eine Funktion f sei n -mal differenzierbar auf $]a, b[$ mit $n \geq 2$. An einer Stelle x_0 gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum und
- ist n ungerade, dann hat f in x_0 kein Extremum.

3.3.7 Beispiel Sei $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$. Da

$$f'(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x^2 - 2x + 1) = x^3(x - 1)^2$$

hat f' Nullstellen in 0 und 1. Dies sind also mögliche Stellen für Extremwerte.

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 &\Rightarrow f''(0) = 0 &\text{ und } f''(1) = 0 \\ f'''(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x &\Rightarrow f'''(0) = 0 &\text{ und } f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6 &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 6 \end{aligned}$$

In $x = 0$ ist also $n = 4$ (gerade) und $f^{(4)}(0) > 0$, es liegt also ein lokales Minimum vor.

In $x = 1$ dagegen ist $n = 3$, n ist also ungerade und es gibt hier kein Extremum.

3.4 Die Regeln von de l'Hospital

Ableitungen können auch benutzt werden, um Grenzwerte von Funktionen zu berechnen.

3.4.1 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{0}{0}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mit diesem Satz können wir also Grenzwerte von Quotienten berechnen, bei denen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren.

3.4.2 Bemerkung Der Satz gilt auch, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.3 Beispiele (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?$

Es ist $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ und weiter $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ sowie $(x)' = 1$. Außerdem existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$, die Regel von de l'Hospital ist also anwendbar, und wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = ?$

Auf den ersten Blick ist die Regel von de l'Hospital hier nicht anwendbar, da es sich nicht um den Quotienten zweier Funktionen handelt. Wir können die Funktion aber umschreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^{-1})}{x^{-1}} \end{aligned}$$

(hier kommt nun die Regel von de l'Hospital zum Einsatz, die Voraussetzungen sind erfüllt)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^{-1}} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \underbrace{x^{-1}}_{\rightarrow 0}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die Regel von de l'Hospital gibt es auch noch in einer anderen Form, wenn nämlich sowohl Zähler als auch Nenner gegen Unendlich divergieren:

3.4.4 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{\infty}{\infty}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$.

Gilt⁴ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.4.5 Bemerkung Auch dieser Satz gilt ebenso, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.6 Beispiel $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = ?$

Es ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $(x)' = 1$, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3.5 Das Newton-Verfahren

Wie wichtig die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist, haben wir z.B. bei der Untersuchung von Extremwerten gesehen.

In einigen Fällen, z.B. bei quadratischen Gleichungen (*“p-q-Formel”*), sind wir in der Lage, die Nullstellen zu berechnen. In allgemeineren Fällen ist die exakte Berechnung der Nullstellen aber oft kaum möglich. Tatsächlich ist man nur in den wenigsten Fällen in der Lage, Nullstellen präzise auszurechnen.

Andererseits ist in der Praxis der mathematischen Anwendungen diese exakte Berechnung oft gar nicht erforderlich. In vielen Fällen genügt eine *numerische Approximation*, d.h. eine näherungsweise Bestimmung.

Intervallhalbierungsmethode

Eine einfache Idee, wie eine solche Approximation im Fall einer stetigen Funktion erfolgen könnte, besteht darin, ein Intervall zu betrachten, an dessen Enden die Funktion unterschiedliche Vorzeichen hat. Offensichtlich muss sich dann irgendwo im Intervall eine Nullstelle befinden.

Nun halbiert man das Intervall und betrachtet das Vorzeichen der Funktion in der Intervallmitte. Man kann nun erkennen, in welcher Hälfte die gesuchte Nullstelle liegen muss und hat die Lage der Nullstelle auf diese Intervallhälfte eingegrenzt.

Das Verfahren wiederholt man nun mit der gefundenen Intervallhälfte so lange, bis man die Nullstelle hinreichend genau lokalisiert hat.

3.5.1 Beispiel Führen wir das Verfahren durch, um eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

zu suchen. Sei $[a_i, b_i]$ das betrachtete Intervall im i -ten Schritt. Die Intervallmitte ist dann $\frac{a_i + b_i}{2}$. Nach evtl. ein wenig Probieren finden wir heraus, dass z.B. das Intervall $[a_0, b_0] = [0, 6]$ unter-

⁴Hier ist keine Annahme über $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ erforderlich.

schiedliche Vorzeichen an den Intervallenden hat:

i	$[a_i, b_i]$	Mitte $\frac{a_i+b_i}{2}$	$f(a_i)$	$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$	$f(b_i)$	Nullstelle in ...
0	$[0, 6]$	3	-8	-5	16	rechter Hälfte
1	$[3, 6]$	4.5	-5	3.25	16	linker Hälfte
2	$[3, 4.5]$	3.75	-5	-1.4375	3.25	rechter Hälfte
3	$[3.75, 4.5]$	4.125	-1.4375	0.765625	3.25	linker Hälfte
4	$[3.75, 4.125]$	3.9375	-1.4375	-0.37109375	0.765625	rechter Hälfte

Wir sehen also, dass eine Nullstelle irgendwo in $[3.9375, 4.125]$ liegen muss. Tatsächlich gibt es eine Nullstelle in 4.

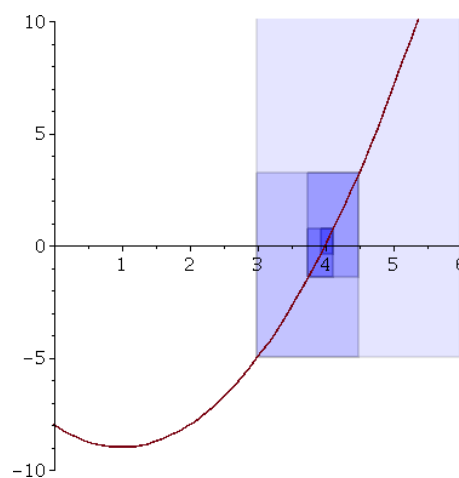


Abbildung 38: Intervallhalbierungsmethode angewandt auf $f(x) = x^2 - 2x - 8$

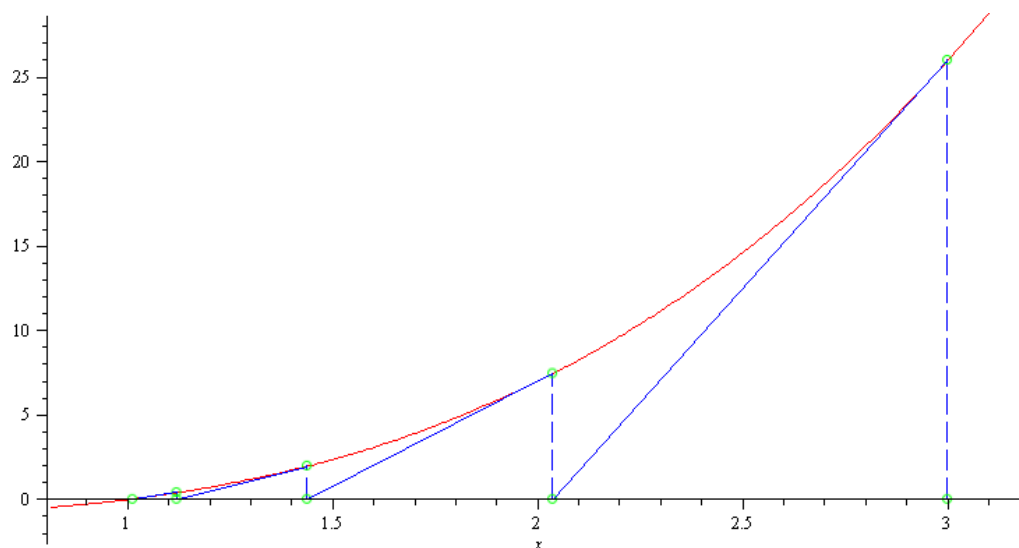
Auch, wenn das Verfahren bei stetigen Funktionen funktioniert, erkennt man jedoch, dass es nur recht langsam zu einem Ergebnis führt, das z.B. auf mehrere Nachkommastellen genau ist.

Newton-Verfahren

Ist die untersuchte Funktion differenzierbar, können wir Differenzialrechnung nutzen, um Nullstellen zu finden. Die Grundidee ist, dass die Nullstelle einer Geraden sehr leicht berechnet werden kann. Wir ersetzen daher die Funktion durch eine Tangente an $f(x)$ im Punkt $x = x_0$, berechnen die Nullstelle x_1 der Tangenten und betrachten dann die Tangente für $x = x_1$, berechnen deren Nullstelle x_2 usw.

Die Tangente an $f(x)$ in $x = x_0$ ist allgemein gegeben durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Abbildung 39: Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 1$ beginnend in $x_0 = 3$

Die Nullstelle hiervon ist, falls $f'(x_0) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
 &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x \\
 \Leftrightarrow f'(x_0)x &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} \\
 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
 \end{aligned}$$

Diesen Punkt $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ verwenden wir als nächsten Punkt x_1 und so weiter:

3.5.2 Definition Sei f differenzierbar auf $]a, b[$. Dann ist die *Newton-Folge* von f mit dem *Startwert* $x_0 \in]a, b[$ die Folge (sofern $f'(x_n) \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
 x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
 &\vdots \\
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Wenn diese Folge konvergiert, dann gegen eine Nullstelle von f :

3.5.3 Satz Sei f differenzierbar auf $]a, b[$ mit stetiger Ableitung. Die Newton-Folge von f mit einem Startwert $x_0 \in]a, b[$ existiere und konvergiere gegen z . Dann ist $f(z) = 0$.

3.5.4 Beispiel Sei $f(x) = x^3 - 1$. Beginnen wir mit $x_0 = 3$, so erhalten wir wegen $f'(x) = 3x^2$ (vgl. Abbildung 39)

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{26}{27} = \frac{55}{27} \approx 2.04 \\x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.44 \\x_3 &\approx 1.12 \\x_4 &\approx 1.0124 \\x_5 &\approx 1.00015\end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt in 1, wir sehen also, dass das Newton-Verfahren hier in nur fünf Schritten eine recht gute Approximation liefert.

Auch andere Startwerte liefern diese Nullstelle, evtl. aber nicht so schnell: beginnen wir mit $x_0 = -1$, erhalten wir

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{3} \approx -0.3333 \\x_2 &= \frac{25}{9} \approx 2.7778 \\x_3 &= 1.895 \\x_4 &\approx 1.3562 \\x_5 &\approx 1.0854 \\x_6 &\approx 1.0065 \\x_7 &\approx 1.00004\end{aligned}$$

3.5.5 Bemerkung Einen Nachteil hat das Newton-Verfahren: es führt nicht immer zum Ziel! Eventuell ist ein $f'(x_n) = 0$, dann existiert die Folge gar nicht. Unter Umständen ist (x_n) auch nicht konvergent.

In der Praxis ist dieser Nachteil des Newton-Verfahrens meistens kein Problem: man wählt einfach einen andern Startwert x_0 und beginnt von Neuem.

4 Integralrechnung

4.1 Integrierbarkeit

Die Grundidee der Integralrechnung ist die Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse. Recht einfach ist diese Fläche z.B. bei konstanten Funktionen $f(x) = c$, da dort die fragliche Fläche ein Rechteck ist. Bei „komplizierteren“ Funktionen versucht man, die Fläche durch mehrere Rechtecke anzunähern.

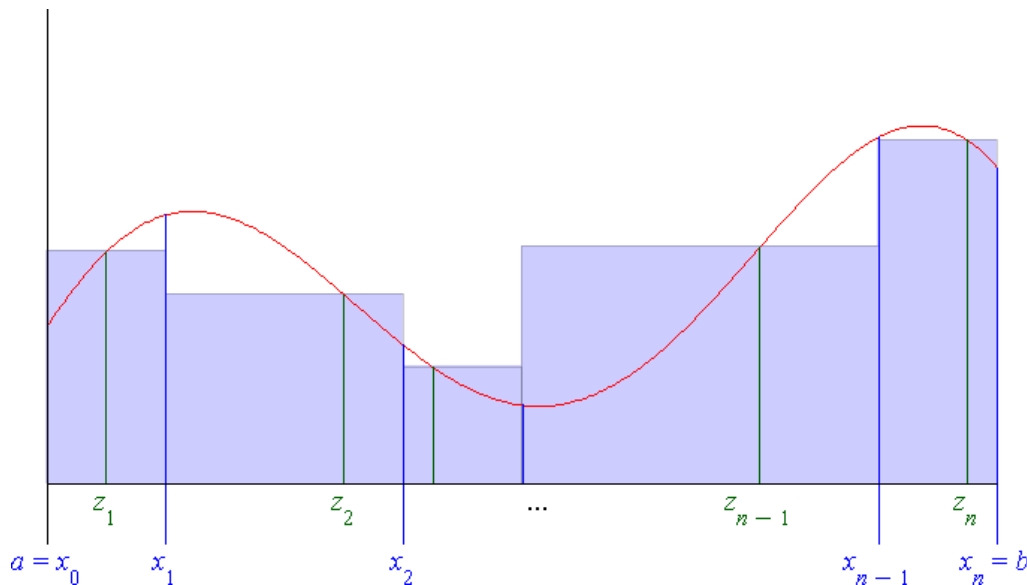


Abbildung 40: Zerlegung in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit Zwischenstellen z_i

Wollen wir beispielsweise die Fläche „unter“ einer Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ approximieren, können wir folgendermaßen vorgehen:

- (1) Wir zerlegen $[a, b]$ auf eine beliebige Weise in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Die x_i bilden eine *Zerlegung* Z :

$$Z : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b .$$

- (2) In jedem Teilintervall wählen wir eine beliebige *Zwischenstelle*

$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

- (3) Für jedes Teilintervall können wir eine rechteckige *Teilfläche* berechnen, die Höhe des Rechtecks ist der Funktionswert an der Zwischenstelle, die Breite des Rechtecks ist die Länge des Teilintervalls:

$$f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

- (4) Zum Schluss addieren wir alle Teilflächen und erhalten eine Approximation an die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f :

$$I_Z = \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

I_Z heißt *Riemannsche Summe* zur Zerlegung Z .

Diese Approximation kann verbessert werden, indem eine *feinere* Zerlegung Z gewählt wird. Sei $\|Z\| = \max\{x_i - x_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ die *Norm* einer Zerlegung Z (anschaulich ist dies die Breite des breitesten Teilintervalls). Mit $\|Z\| \rightarrow 0$ nähert sich offensichtlich I_Z der gesuchten Fläche.

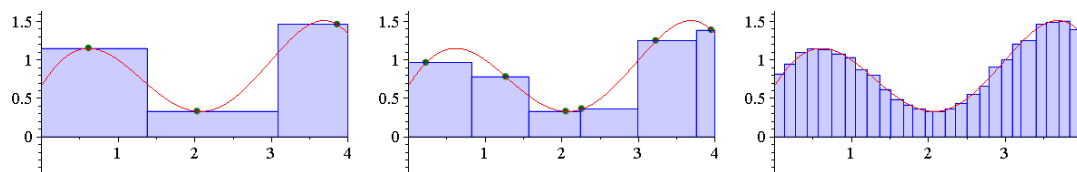


Abbildung 41: Feinere Zerlegungen ergeben genauere Approximationen

Wenn nun das obige Verfahren für beliebige Zerlegungen mit $\|Z\| \rightarrow 0$ und beliebige Zwischenstellen z_i stets das gleiche Ergebnis liefert, können wir diesen Grenzwert als die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse auffassen:

4.1.1 Definition Sei f eine Funktion, die im Intervall $[a, b]$ beschränkt ist (d.h. $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$). Konvergieren die Riemannschen Summen

$$I_Z = \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

für *alle* Folgen von Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit $\|Z\| \rightarrow 0$ und *jede* Wahl von Zwischenstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegen einen Grenzwert I , so ist f *integrierbar* in $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} I_Z.$$

$\int_a^b f(x) dx$ ist das *Integral* über f von a bis b . $[a, b]$ heißt *Integrationsintervall*, f ist der *Integrand*.

4.1.2 Bemerkung (1) Ist $f(z_i)$ an einer Zwischenstelle z_i negativ, geht auch die entsprechende Teilfläche negativ in die Berechnung ein. Dadurch unterscheidet sich das Integral dann von der Vorstellung einer „Fläche unter f “.

(2) Die Variable x in $\int_a^b f(x) dx$ ist nur ein Platzhalter. Ebenso könnte man eine andere Variable wählen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\omega) d\omega = \dots$$

4.1.3 Beispiele (1) $\int_a^b c dx = ?$

Hier ist also $f(x) = c$ für alle x . Betrachten wir also eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$

$$Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$