

2.8.5 Satz Sei $y = f(x)$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf dem Intervall $[a, b]$. Dann existiert die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$.

Sie ist stetig und streng monoton wachsend, wenn f streng monoton wächst bzw. streng monoton fallend, wenn f streng monoton fällt.

2.8.6 Beispiele (1) $f(x) = \sin x$

f ist zwar stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht monoton (vgl. Abbildung 7), scheinbar können wir den obigen Satz also gar nicht anwenden. Wir können die Funktion aber streng monoton „machen“, indem wir ihren Definitionsbereich auf ein Intervall einschränken, in dem sie dies ist.

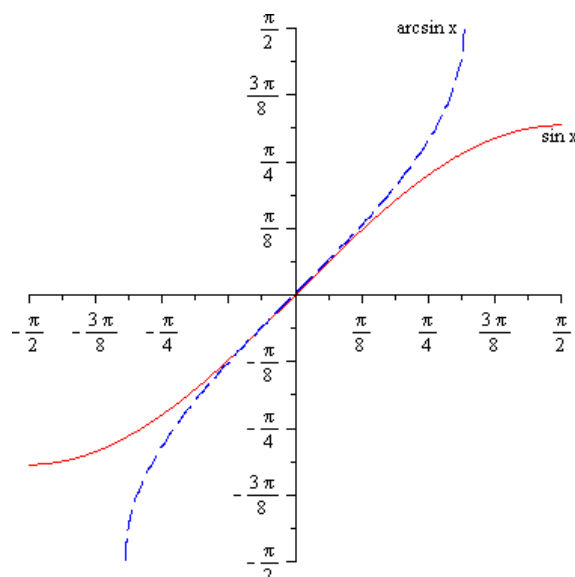


Abbildung 24: $\sin x$ und $\arcsin x$

Betrachten wir also $f(x) = \sin x$ mit $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Auf $D(f)$ ist f streng monoton wachsend, es gibt nach Satz 2.8.5 also eine (ebenfalls streng monoton wachsende) Umkehrfunktion für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, den *Arcus Sinus* (Abb.24):

$$y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin^{-1} y = \arcsin y.$$

Da $W(\sin) = [-1, 1]$ und wir hier $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ betrachten, gilt

$$D(\arcsin) = [-1, 1]$$

$$W(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $f(x) = \cos x$

Analog zum Sinus behandeln wir den Cosinus: $\cos x$ ist stetig und streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Also existiert eine streng monoton fallende Umkehrfunktion, der *Arcus Cosinus* (Abb. 25):

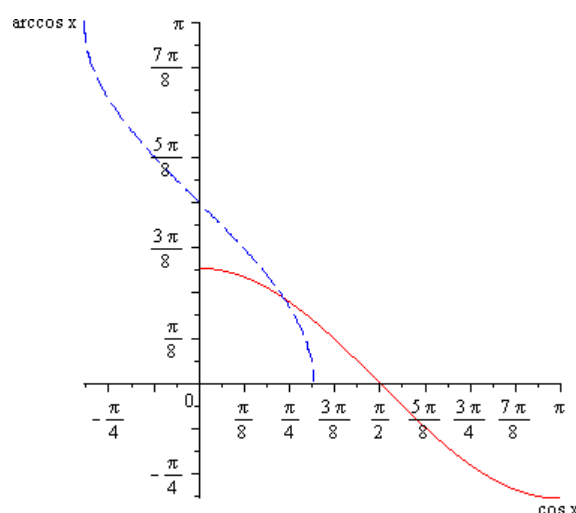
Für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$y = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos^{-1} y = \arccos y$$

mit

$$D(\arccos) = [-1, 1]$$

$$W(\arccos) = [0, \pi]$$

Abbildung 25: $\cos x$ und $\arccos x$ (3) $f(x) = x^2$

Oben hatten wir bereits gesehen, dass $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion haben kann. Unsere Methode, den Definitionsbereich geeignet einzuschränken, funktioniert aber auch hier.

Auf $D(f) = [0, \infty[$ ist f streng monoton wachsend und stetig, es gibt also eine Umkehrfunktion, die uns auch schon bekannt ist:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

(4) $f(x) = e^x$

Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{R}$ auch ohne Einschränkung ihres Definitionsbereichs streng monoton. Die Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus:

$$f^{-1}(x) = \ln x.$$

2.9 Logarithmische Skalen

Abbildungen 26 und 27 stellen beide den Verlauf der Covid-19-Pandemie in verschiedenen Ländern dar. Während in der linken Abbildung aber kaum noch etwas zu erkennen ist (abgesehen von den drei oberen Linien, die den Verlauf in den USA, in Indien und Brasilien darstellen), zeigt die rechte Abbildung deutlicher die Unterschiede der Entwicklungen in den verschiedenen Ländern.

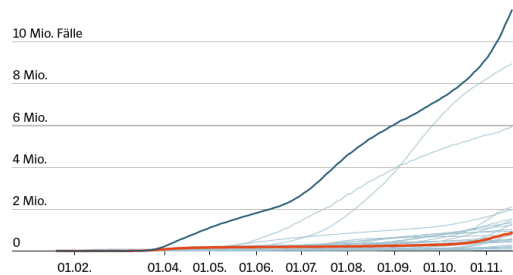
Grund ist die *logarithmische Skalierung* der vertikalen Achse im rechten Bild. Der Abstand zwischen den Linien für 100 und 1000 Fälle ist dabei genauso groß, wie der Abstand zwischen 1000 und 10000, der zwischen 10000 und 100000 usw.

Das Besondere an dieser Darstellung: Exponentielles Verhalten zeigt sich nun als *Gerade*, wie wir in den Abbildungen 28 und 29 am Beispiel von $f(x) = 2^x$ sehen können.

In Abbildung 27 ist das bei fast allen Ländern gut in den ersten Tagen zu sehen: die Kurven stellen dort näherungsweise Geraden dar. In den späteren Tagen der Entwicklung krümmen sich die Kurven dagegen nach rechts — ein Zeichen, dass das Wachstum nicht mehr exponentiell fortschreitet.

Betrachten wir nun statt der Exponentialfunktion eine Potenz, z.B. $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion wächst langsamer als eine Exponentialfunktion, in logarithmischer Darstellung ist der

Bestätigte Infektionen insgesamt in den [USA](#), [Deutschland](#) und [anderen Ländern](#)



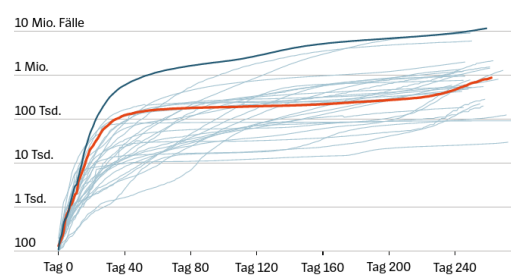
Nachmeldungen und Korrekturen können zu Sprüngen in der Statistik führen

Quelle: [Johns Hopkins CSSE](#) (Stand 19.11.2020, 6.00 Uhr)

DER SPIEGEL

Abbildung 26: Covid-19-Fallzahlen mit linearer y -Skala

Bestätigte Infektionen insgesamt in den [USA](#), [Deutschland](#) und [anderen Ländern](#) seit dem Tag, an dem mindestens 100 Fälle registriert waren (logarithmisch)



Nachmeldungen und Korrekturen können zu Sprüngen in der Statistik führen

Quelle: [Johns Hopkins CSSE](#) (Stand 19.11.2020, 6.00 Uhr)

DER SPIEGEL

Abbildung 27: Covid-19-Fallzahlen mit logarithmischer y -Skala

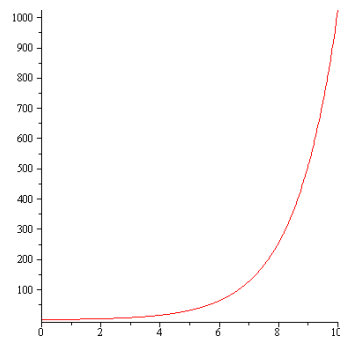


Abbildung 28: $f(x) = 2^x$ mit linearer y -Skala

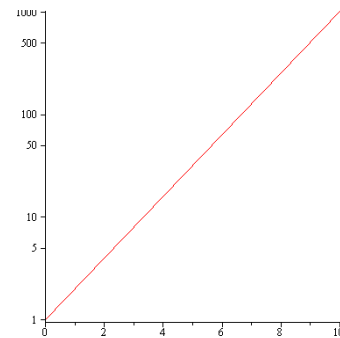


Abbildung 29: $f(x) = 2^x$ mit logarithmischer y -Skala

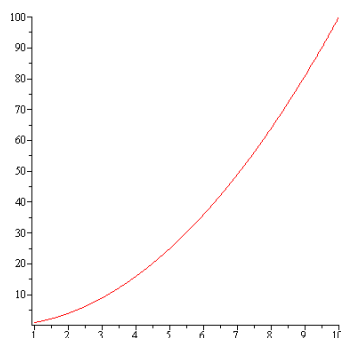


Abbildung 30: $f(x) = x^2$ mit linearen Skalen

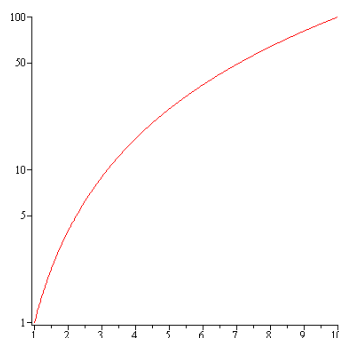


Abbildung 31: $f(x) = x^2$ mit logarithmischer y -Skala

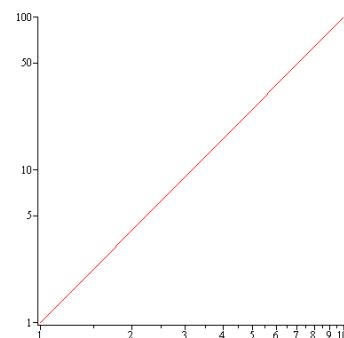


Abbildung 32: $f(x) = x^2$ mit doppeltlogarithmischer Skalierung (logarithmische x - und y -Achse)

Graph also nach unten gekrümmt. Verwenden wir aber zusätzlich auch auf der horizontalen Achse eine logarithmische Skala, erhalten wir eine Gerade. Eine solche Darstellung heißt *doppeltlogarithmisch*.

In der Praxis ist der Eintrag von (Mess-)Werten in logarithmische oder doppeltlogarithmische Skalen eine einfache Möglichkeit, zu prüfen, ob z.B. experimentelle Daten einer exponentiellen

oder einer potenziellen Gesetzmäßigkeit entsprechen:

In Graphen mit linearen Skalen sind Potenzen oder Exponentialfunktionen kaum zu unterscheiden. Zeichnet man die Graphen aber mit (doppelt-)logarithmischen Skalen, ist i.a. recht leicht erkennbar, wann die Daten die Form einer Geraden annehmen. Dies hilft dann, den richtigen Ansatz für eine mathematische Modellierung zu finden, d.h. eine Funktion zu finden, die das Verhalten der beobachteten Daten beschreibt.

2.9.1 Beispiel Betrachten wir ein Experiment, in dem wir eine Größe in Abhängigkeit von einer anderen Größe messen.² In Abbildung 33 sind die gemessenen Werte eingezeichnet. Wir können den Werten nicht entnehmen, welche Gesetzmäßigkeit vorliegt.

In logarithmischer Darstellung — Abbildung 34 — sehen wir aber, dass es sich offenbar nicht um eine exponentielle Abhängigkeit handelt, da der Graph keine Gerade darstellt. Ein Exponential-Ansatz der Form $f(t) = Ae^{Bt}$ wie in Abschnitt 2.2.2 wäre also falsch gewesen.

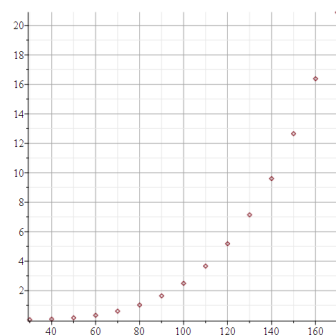


Abbildung 33: Meßwerte mit linearer Skala

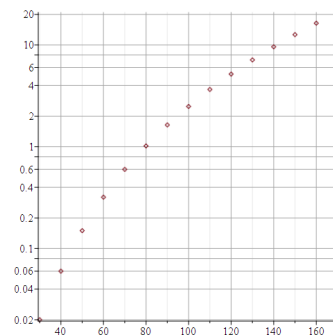


Abbildung 34: Meßwerte mit logarithmischer Skala

Versuchen wir, die Daten in doppeltlogarithmischen Skalen darzustellen, erhalten wir Abbildung 35.

Hier scheinen die gemessenen Werte eine Gerade zu bilden. Wir können also vermuten — ohne Näheres über die Gesetzmäßigkeiten des Experiments zu wissen —, dass es sich hier wohl um eine Potenz handelt und einen Ansatz der Form $f(t) = at^b$ probieren.³

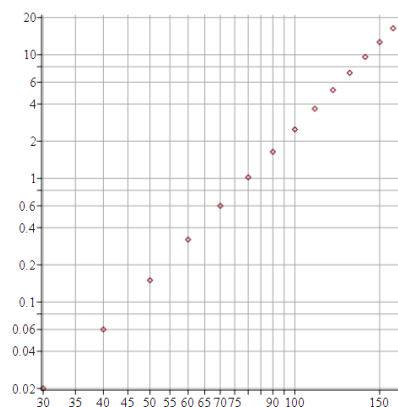


Abbildung 35: Meßwerte mit doppeltlogarithmischer Skala

²Es ist ganz egal, worum es sich im Einzelnen handelt. In diesem Beispiel benutze ich die Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers bei verschiedenen Temperaturen

³Tatsächlich unterliegt das Experiment dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz*: $P = \sigma \cdot A \cdot t^4$

3 Differenzialrechnung

3.1 Differenzierbarkeit

Eine Grundidee der Differenzialrechnung ist die Frage, welche „Steigung“ eine Funktion in einem gegebenen Punkt hat.

Wir schauen uns zuerst nur reelle Funktionen an, da wir deren Graph zeichnen können. Das Prinzip können wir dann aber leicht auf komplexe Funktionen übertragen.

Betrachten wir eine Funktion $f(x)$ an einem Punkt a . Der Graph der Funktion läuft also durch den Punkt mit den Koordinaten $(a, f(a))$. Wir wollen die Steigung von f an dieser Stelle bestimmen. Da wir die Steigung von Geraden leicht angeben können (α ist ja die Steigung der Geraden $g(x) = \alpha x + \beta$), versuchen wir die *Tangente* an dem untersuchten Punkt zu bestimmen.

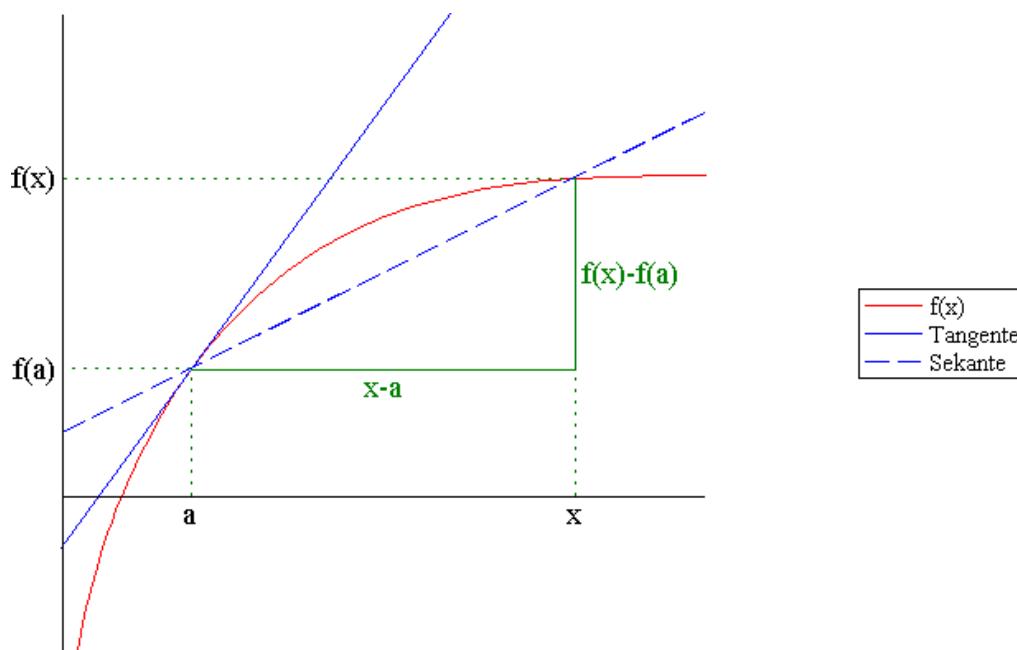


Abbildung 36: Sekante und Tangente einer Funktion

Dazu schauen wir uns zuerst eine *Sekante* an, also eine Gerade, die durch zwei Punkte des Graphen von f läuft, sagen wir durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Die Steigung einer solchen Sekanten ist (vgl. Abbildung 36)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (6)$$

Mit $x \rightarrow a$ verschiebt sich die Sekante immer mehr zur Tangente in $(a, f(a))$. Die Steigung der Tangenten ist also der Grenzwert des *Differenzenquotienten* (6) für $x \rightarrow a$.

3.1.1 Definition Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in $a \in D(f)$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

f heißt *differenzierbar auf* $M \subset D(f)$, wenn f in allen $a \in M$ differenzierbar ist.

Die Funktion f' heißt *Ableitung* von f .

3.1.2 Bemerkung (1) Der Differenzenquotient (6) wurde zwar durch Anschauung einer reellen Funktion hergeleitet, natürlich können wir die reellen Zahlen x und a aber einfach durch komplexe Zahlen ersetzen.

Definition 3.1.1 kann also in genau gleicher Weise auch für komplexe Funktionen benutzt werden - wir verwenden dann lediglich $x, a \in \mathbb{C}$ statt reeller Werte.

(2) Natürlich kann auch die Ableitung f' auf Differenzierbarkeit untersucht werden und evtl. hat auch f' eine Ableitung, die dann wiederum eine Ableitung haben kann, et cetera. Auf diese Weise entstehen die *Ableitungen höherer Ordnung*

$$f'', \quad f''', \quad f^{(4)}, \quad f^{(5)}, \dots$$

(3) Die erste Ableitung entspricht — so hatten wir die Ableitung ja konstruiert — der *Steigung* der Funktion.

Die zweite Ableitung stellt nun die Veränderung der Steigung dar, anders ausgedrückt, die *Krümmung* der Funktion.

(4) Nach Definition des Grenzwerts von Funktionen muss jeweils gezeigt werden, dass für *jede* Folge (a_n) aus $D(f)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = f'(a) .$$

Hat man also eine Folge gefunden, für die dieser Grenzwert nicht existiert, ist f nicht differenzierbar. Das gleiche gilt, falls man zwei Folgen hat, die zu unterschiedlichen Grenzwerten führen.

3.1.3 Beispiele (1) $f(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Sei a ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{\alpha z + \beta - \alpha a - \beta}{z - a} \\ &= \frac{\alpha(z - a)}{z - a} \\ &= \alpha \xrightarrow{z \rightarrow a} \alpha , \end{aligned}$$

f ist also differenzierbar in allen komplexen Zahlen (da a beliebig in $\mathbb{C}$ gewählt war) und es gilt

$$f'(z) = \alpha .$$

Bei Geraden hatten wir ja auch nichts anderes erwartet. Spezialfälle sind beispielsweise die Identität

$$f(z) = z \quad \text{mit} \quad f'(z) = 1$$

oder die konstanten Funktionen

$$f(z) = \beta \quad \text{mit} \quad f'(z) = 0 .$$

(2) $f(z) = z^2$

Sei wieder $a \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{z^2 - a^2}{z - a} \\ &= \frac{(z + a)(z - a)}{z - a} \\ &= z + a \xrightarrow{z \rightarrow a} a + a = 2a \end{aligned}$$

Im Punkt a ist f also differenzierbar mit $f'(a) = 2a$. Da a beliebig gewählt war, ist folglich $f(z) = z^2$ auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(z) = 2z$.

(3) $f(x) = |x|$ im Punkt 0 und mit $D(f) = \mathbb{R}$

Wenn wir uns den Graphen von f vorstellen, bemerken wir, dass f in 0 keine eindeutige Tangente hat — die Betragsfunktion ist dort also vermutlich nicht differenzierbar.

Betrachten wir beispielsweise die Folge $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| - |0|}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 .$$

Andererseits gilt für $a_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right| - |0|}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 .$$

Auf diesen beiden Folgen strebt der Differenzenquotient also gegen unterschiedliche Werte, kann daher nicht konvergieren. Folglich ist $f(x) = |x|$ in 0 nicht differenzierbar.

In allen anderen reellen Zahlen ist die Betragsfunktion aber sehr wohl differenzierbar; die Ableitung ist 1 für positive und -1 für negative Werte.

Sehen wir uns einen allgemeineren Fall an. f sei nun eine in a differenzierbare Funktion, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) .$$

existiert. Es gilt also

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = \lim_{z \rightarrow a} \left(\overbrace{\frac{f(z) - f(a)}{z - a}}^{f'(a)} \cdot \underbrace{(z - a)}_0 \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) .$$

Dies bedeutet aber gerade, dass f in a stetig ist. Wir haben gezeigt:

3.1.4 Satz Ist eine Funktion differenzierbar, so ist sie auch stetig.

Anders ausgedrückt: Ist eine Funktion nicht stetig, kann sie auch nicht differenzierbar sein.

Die Umkehrung dieses Satzes aber gilt nicht: Oben haben wir gesehen, dass der Betrag in 0 nicht differenzierbar ist, obwohl die Funktion dort stetig ist.

3.2 Ableitungsregeln

Für einige der Funktionen in Abschnitt 2.2 wäre der Nachweis der Differenzierbarkeit und die Berechnung der Ableitung über die Betrachtung von Folgen nicht einfach, zum Beispiel:

3.2.1 Satz Die Funktionen e^z , $\sin x$ und $\cos x$ sind für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Natürlich ist es aber nicht möglich, eine Liste aller differenzierbaren Funktionen aufzustellen, wir brauchen dazu bessere Techniken.

In der Praxis werden zur Berechnung von Ableitungen Regeln verwendet, die besagen, dass Summen, Produkte, usw. differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind und beschreiben, wie die gesuchten Ableitungen gebildet werden.

3.2.2 Satz (Summenregel) Seien f und g in a differenzierbar. Dann ist auch $f \pm g$ in a differenzierbar mit

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) .$$

3.2.3 Beispiel Sei $h(z) = z^2 + 2z + 1$. Wir können h als Summe von $f(z) = z^2$ und $g(z) = 2z + 1$ ansehen. Wir wissen aus den Beispielrechnungen 3.1.3

$$f'(z) = 2z \quad \text{und} \quad g'(z) = 2$$

und haben daher

$$h'(z) = f'(z) + g'(z) = 2z + 2 .$$

Schauen wir uns das Beispiel aus einer anderen Perspektive an: Es gilt $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. $z+1$ ist eine Gerade, die Ableitung ist $(z+1)' = 1$. Also gilt $(z+1)' \cdot (z+1)' = 1$. Wir wissen aber ja, dass $h'(z) = ((z+1)(z+1))' = 2z + 2$, offensichtlich gilt i.a. $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$. Für das Produkt von Funktionen brauchen wir eine andere Regel:

3.2.4 Satz (Produktregel) Seien f und g differenzierbar in a . Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in a mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) .$$

3.2.5 Beispiele (1) Betrachten wir wie oben $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. Es folgt

$$h'(z) = 1 \cdot (z+1) + (z+1) \cdot 1 = 2z + 2 ,$$

wie wir es oben bereits ausgerechnet hatten.

(2) Betrachten wir den Fall, in dem eine Funktion mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ multipliziert wird. Da die Ableitung einer Konstanten Null ist, folgt:

$$(cf(z))' = 0 \cdot f(z) + c \cdot f'(z) = cf'(z) .$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten also einfach erhalten.

(3) Für $h(z) = z^3 = \underbrace{z^2}_{f(z)} \cdot \underbrace{z}_{g(z)}$ erhalten wir

$$h'(z) = 2z \cdot z + z^2 \cdot 1 = 3z^2 .$$

Allgemein kann man wie im Beispiel $f(z) = z^3$ mit der Produktregel die Ableitung von höheren Potenzen errechnen. (Für die Potenzen $z^0 = 1$ und $z^1 = z$ haben wir das ja in Beispiel 3.1.3 bereits ausgerechnet.)

Tatsächlich gilt nicht nur für Exponenten aus $\mathbb{N}_0$, sondern allgemeiner auch für reelle Exponenten:

3.2.6 Satz Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(z) = z^\alpha$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \alpha z^{\alpha-1} .$$

3.2.7 Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n$ sind nach Summenregel und Satz 3.2.6 differenzierbar mit

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1} .$$

Die Ableitung eines Polynoms ist also auch ein Polynom.

Für den Quotienten differenzierbarer Funktionen gibt es

3.2.8 Satz (Quotientenregel) Seien f und g in a differenzierbar und sei $g(a) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} .$$

3.2.9 Beispiel

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

Funktionen setzen sich nicht nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus anderen Funktionen zusammen — sie können auch verkettet (vgl. Satz 2.7.5) sein. In diesem Fall verwenden wir

3.2.10 Satz (Kettenregel) Sei $h(z)$ differenzierbar in a und sei $g(z)$ differenzierbar in $h(a)$. Dann ist die Funktion

$$f(z) = g(h(z))$$

differenzierbar in a mit

$$f'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z) .$$

g' wird hierbei oft die *äußere Ableitung*, h' die *innere Ableitung* genannt.

3.2.11 Beispiel Betrachten wir $f(x) = (\sin x)^2$. Die innere Funktion ist $h(x) = \sin x$, die äußere Funktion $g(x) = x^2$. Damit gilt

$$((\sin x)^2)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x .$$

Eine Ableitungsregel, die bei Umkehrfunktionen wie Logarithmen und den Arcus-Funktionen nützlich ist, wird der Einfachheit halber nur für reelle Funktionen formuliert:

3.2.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf einem Intervall $[a, b]$ und sei f differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} .$$