

2.3 Polarkoordinaten

Als Anwendung der trigonometrischen Funktionen können wir auf die Anschauung komplexer Zahlen als Punkte der Ebene zurückkommen. Diese erlaubt nämlich auch eine weitere Darstellung komplexer Zahlen:

Real- und Imaginärteil von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ stellen die „kartesischen Koordinaten“ x und y von z in der Gaußschen Ebene dar.

Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann aber auch durch den Abstand vom Nullpunkt, also durch $r = |z|$, und durch den Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ über der positiven reellen Achse bestimmt werden.

Wir erhalten die *Polarkoordinaten* r und φ .

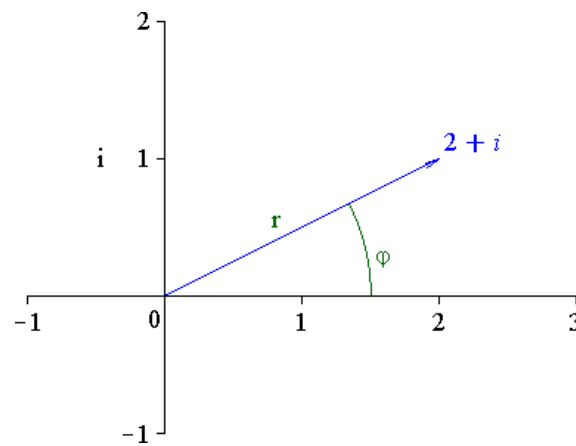


Abbildung 19: Polarkoordinaten komplexer Zahlen

Ist $z = 0$, so ist die Darstellung durch Polarkoordinaten nicht eindeutig, da der Winkel φ beliebig ist.

Sei $z \neq 0$. Für $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ gilt wegen $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sowie

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

2.3.1 Beispiele (1) $z = i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\sin \varphi = \frac{1}{1} = 1$.

Wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ist also $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(2) $z = 1 + i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, der Winkel ist im Intervall $] -\pi, \pi]$ also nicht eindeutig.

Da aber $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ gilt, ist

$$\varphi = \frac{\pi}{4} .$$

(3) Ist $r = 2$ und $\varphi = \pi$, dann haben wir

$$\operatorname{Re} z = r \cos \varphi = 2 \cos \pi = -2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = r \sin \varphi = 2 \sin \pi = 0 ,$$

also

$$z = -2 .$$

2.3.2 Bemerkung Hat $z \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinaten r und φ , dann gilt

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z \\ &= r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

2.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist nicht nur wegen ihrer Bedeutung bei Wachstumsprozessen so interessant. Überraschend mag sein, dass in $\mathbb{C}$ ein Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen existiert:

2.4.1 Satz (Eulersche Formel) Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Damit können wir e^z für $z \in \mathbb{C}$ berechnen: mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

2.4.2 Beispiel

$$e^{1+i\pi} = e^1 (\underbrace{\cos \pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{=0}) = -e$$

2.4.3 Bemerkung Nach der Eulerschen Formel können wir Sinus und Cosinus als Imaginär- und Realteil von e^{iy} auffassen:

$$\operatorname{Re}(e^{iy}) = \cos y \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(e^{iy}) = \sin y$$

2.4.4 Bemerkung Aus Satz 2.4.1 können wir auch eine neue „Darstellung“ komplexer Zahlen gewinnen: Aus der Eulerschen Formel und Bemerkung 2.3.2 folgt nämlich

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} .$$

Wenn also $z = x + iy$ die Darstellung einer komplexen Zahl in „kartesischen“ Koordinaten x und y ist, ist $z = re^{i\varphi}$ die Darstellung in Polarkoordinaten r und φ .

Wir wissen bereits aus Satz 2.2.3, dass Sinus und Cosinus periodische Funktionen mit Periode 2π sind:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x , \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x . \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang ist eine Folgerung aus der Eulerschen Formel überraschend:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

und damit

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z .$$

Also:

2.4.5 Satz Die Exponentialfunktion ist periodisch und hat die Periode $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z .$$

Im Reellen erscheint uns die Exponentialfunktion alles andere als periodisch zu sein. Dies liegt daran, dass die Periode imaginär und nicht reell ist.

Die Periodizität von e^z ist der Grund, warum im Komplexen Logarithmen etwas schwieriger zu behandeln sind als im Reellen: Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Wegen der Periodizität von e^z gibt es aber mehrere Werte $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$. Für $\log w$ kommen also mehrere Werte in Frage.

Hat $z \neq 0$ die Polarkoordinaten r und φ , ist also nach Bemerkung 2.4.4 $z = re^{i\varphi}$, dann erhält man mit den üblichen Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln(r \cdot e^{i\varphi}) \\ &= \ln r + \ln(e^{i\varphi}) \\ &= \ln r + i\varphi . \end{aligned}$$

r ist reell und positiv, $\ln r$ können wir also wie gewohnt berechnen. $\ln r + i\varphi$ wird gelegentlich als *Hauptwert* von $\log z$ bezeichnet.

Weitere Werte erhält man durch die Periodizität von e^z , z.B. ist auch

$$\ln z = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = \ln(r \cdot e^{i\varphi+2\pi i}) = \ln r + i\varphi + 2\pi i .$$

2.5 Komplexe Wurzeln

Kommen wir noch einmal auf Bemerkung 2.4.4 zurück. Wenn r und φ die Polarkoordinaten von z sind, ist danach $z = re^{i\varphi}$. Wir erhalten daraus eine Formel für die Potenzen komplexer Zahlen:

2.5.1 Satz (Formel von de Moivre) Sei k eine ganze Zahl und $z \in \mathbb{C}$ habe die Polarkoordinaten r und φ , d.h. $z = re^{i\varphi}$. Dann gilt

$$z^k = r^k \cdot e^{ik\varphi} .$$

z^k hat also die Polarkoordinaten r^k und $k\varphi$. Dies erlaubt uns eine geometrische Interpretation des Potenzierens in $\mathbb{C}$:

Potenzieren wir eine komplexe Zahl „hoch k “, dann potenziert sich der Betrag r ebenfalls zu r^k , der Winkel φ wird dagegen mit k multipliziert. Beim Quadrieren einer komplexen Zahl ($k = 2$) quadriert sich also der Betrag, der Winkel verdoppelt sich.

Das Potenzieren mit rationalen Zahlen — also die Berechnung von Wurzeln — ist in $\mathbb{C}$ leider nicht so einfach. Betrachten wir z.B.

$$z^3 = 8 .$$

In den reellen Zahlen hätte diese Gleichung die Lösung $z = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ aber gibt es mehrere Lösungen:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ (-1 + i\sqrt{3})^3 &= (1 - 2i\sqrt{3} - 3)(-1 + i\sqrt{3}) = -1 + i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 - 3i\sqrt{3} = 8 \\ (-1 - i\sqrt{3})^3 &= (1 + 2i\sqrt{3} - 3)(-1 - i\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 + 3i\sqrt{3} = 8 \end{aligned}$$

Tatsächlich gibt es in $\mathbb{C}$ immer zwei zweite Wurzeln, drei dritte Wurzeln, vier vierte Wurzeln et cetera.

Alle diese Wurzeln liegen in der Gaußschen Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt und teilen diesen Kreis in Segmente gleicher Größe (vgl. Abb. 20).

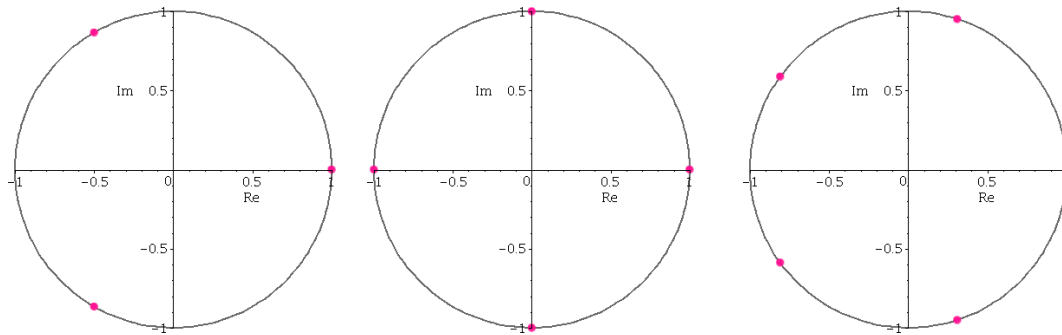


Abbildung 20: 3., 4. und 5. Wurzeln der 1, also Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 3, 4, 5$

Wir hatten beispielsweise die reelle zweite Wurzel (Definition 1.5.4) stets als die *nicht negative* Lösung der Gleichung $x^2 = a$ angesehen. Für komplexe Zahlen gibt es aber kein „positiv“ oder „negativ“. Wurzeln sind in den komplexen Zahlen daher keine Funktionen.

2.6 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte haben wir bei Folgen bereits kennengelernt. Konvergenz gibt es auch bei Funktionen. Während bei Folgen aber stets $n \rightarrow \infty$ betrachtet wird, gibt es bei Funktionen mehrere Möglichkeiten; die Konvergenz kann in jedem Punkt der reellen oder komplexen Zahlen sowie in $\pm\infty$ betrachtet werden.

2.6.1 Beispiel Der Kehrwert $f(x) = \frac{1}{x}$ nimmt für wachsende x Werte an, die sich immer weiter 0 nähern:

$x =$	1	10	100	1000
$f(x) =$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Auch, wenn x immer kleinere Werte annimmt, nähert sich $f(x)$ der Null:

$x =$	-1	-10	-100	-1000
$f(x) =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$

In der Nähe von 0, zeigt $f(x)$ dagegen kein einheitliches Verhalten:

$x =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1
$f(x) =$	-1	-10	-100	100	10	1

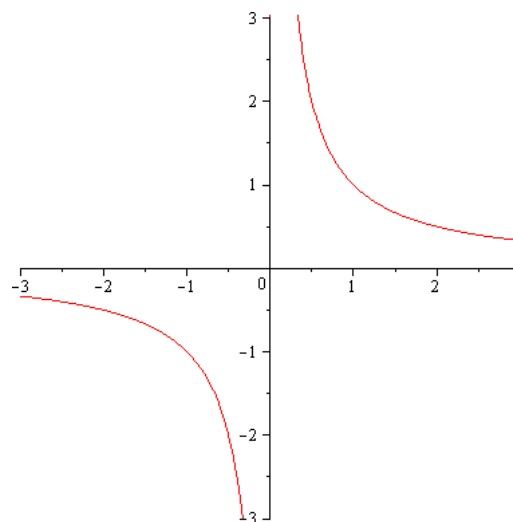


Abbildung 21: $f(x) = \frac{1}{x}$

Dieses Verhalten, Konvergenz bzw. Divergenz bei der Annäherung an eine untersuchte Stelle a , wollen wir exakter fassen. Die Idee ist, eine Folge (a_n) zu betrachten, die gegen die untersuchte Stelle a konvergiert, und dann die Konvergenz der Folge $(f(a_n))$ anzuschauen (die Konvergenz von Folgen kennen wir ja schon; vgl. Abb. 22).

2.6.2 Definition Eine Funktion f hat an der Stelle a (hier ist $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ sowie $a \in \mathbb{C}$ zugelassen) einen *Grenzwert* g , wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D(f)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g .$$

Die Bezeichnung für diesen Grenzwert einer Funktion ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g .$$

2.6.3 Bemerkung Formal müssten wir, um nachzuweisen, ob ein bestimmter Wert Grenzwert einer gegebenen Funktion ist, *alle* Folgen (a_n) betrachten, die gegen die betrachtete Stelle konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ für *alle* diese Folgen berechnen.

Wir wollen hier einen pragmatischeren Weg gehen, auch wenn dieser sehr „unmathematisch“ ist: In den allermeisten Fällen ist bereits nach kurzer Rechnung oder durch Betrachtung des Graphen „klar“, gegen welchen Grenzwert eine Funktion konvergiert. Mathematisch müsste dies natürlich exakt bewiesen werden, in der Praxis ist das aber oft gar nicht erforderlich.

2.6.4 Beispiele (1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ im Punkt $a = 1$.

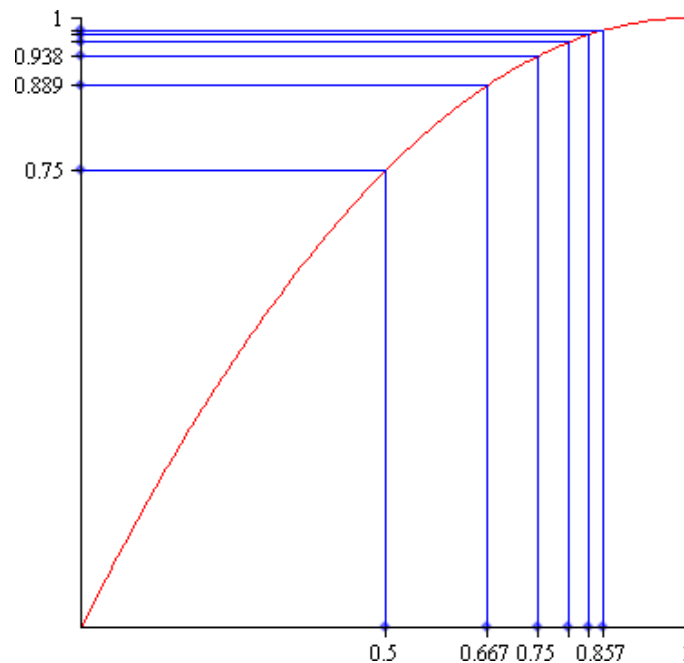


Abbildung 22: Wenn eine Folge (a_n) auf der x -Achse gegen 1 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(a_n))$ auf der y -Achse ebenfalls: Hier existiert also der Grenzwert der Funktion.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\
 &= 2 .
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir hatten ja schon in Beispiel 2.6.1 gesehen, dass wir hier unterschiedliches Konvergenzverhalten finden, Abbildung 21 zeigt dies auch deutlich.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ nähern sich die Funktionswerte der Null, es gilt also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

In Null selbst ist $f(x) = \frac{1}{x}$ gar nicht definiert, es gibt aber auch keinen Wert, gegen den die Funktion dort konvergiert, $f(x)$ hat also für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert.

Wie bei der Konvergenz von Folgen gilt auch für Funktionen:

2.6.5 Satz (Rechenregeln) Seien f und g Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$. Dann gilt:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, sofern $g(x) \neq 0$ und $G \neq 0$

2.6.6 Beispiele (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x - x^2) = 1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1$, da $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

(2) $\lim_{z \rightarrow i} (1 + 2z - z^2) = 1 + 2i - i^2 = 2 + 2i$

2.7 Stetigkeit

Der Begriff der „Stetigkeit“ ist anschaulich ziemlich klar: Man bezeichnet eine Funktion als stetig in einem Punkt, wenn sie dort nicht „springt“, also nicht plötzlich ihre Werte verändert.

Mathematisch ausgedrückt, bedeutet dies, dass der Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gerade gleich dem Funktionswert ist:

2.7.1 Definition Eine Funktion f ist an einer Stelle $a \in D(f)$ *stetig*, wenn der Grenzwert von f an dieser Stelle existiert mit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Ist f stetig in allen Punkten einer Menge M , dann heißt f *stetig auf M* .

Ist eine Funktion in einem Punkt ihres Definitionsbereichs nicht stetig, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es den Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gar nicht, oder der Grenzwert existiert zwar, ist aber verschieden vom Funktionswert.

In den meisten Fällen ist anschaulich klar, ob eine Funktion stetig ist bzw. wo ihre Unstetigkeitsstellen liegen:

2.7.2 Beispiele (1) Die konstante Funktion $f(z) = c$, die Identität $f(z) = z$ und allgemein alle Geraden sind auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. ganz $\mathbb{C}$ stetig (vgl. Abbildung 8).

(2) $f(z) = \frac{1}{z}$

Der Kehrwert $f(z) = \frac{1}{z}$ (vgl. Abbildung 10) ist für $z \neq 0$ offenbar stetig.

Interessant ist die Stelle $z = 0$. f ist in diesem Punkt nicht definiert, kann dort also auch nicht unstetig oder stetig sein. Die Frage nach (Un-)Stetigkeit macht nur für Punkte aus dem Definitionsbereich Sinn. Man kann also nicht sagen, $f(z)$ sei unstetig in 0.

Tatsächlich hat die Kehrwertfunktion keine Unstetigkeitsstellen.

(3) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$

Diese Funktion ist auch für $z = 0$ definiert, wir können also $D(f) = \mathbb{C}$ betrachten.

Wie die Kehrwertfunktion aus Beispiel (2) ist auch diese Funktion stetig für $z \neq 0$.

In 0 ist f aber unstetig, denn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ existiert nicht, kann also nicht gleich dem Funktionswert $f(0) = 0$ sein.

Für stetige Funktionen gelten die Rechenregeln, wie wir sie auch schon für die Grenzwerte von Funktionen kennen:

2.7.3 Satz (Rechenregeln) Sind $f(z)$ und $g(z)$ stetige Funktionen, so ist auch...

- $f(z) \pm g(z)$ stetig,
- $f(z) \cdot g(z)$ stetig und
- $\frac{f(z)}{g(z)}$ stetig, sofern $g(z) \neq 0$.

2.7.4 Beispiele (1) Polynome $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ sind stetig auf $D(P) = \mathbb{C}$:

Polynome sind durch Addition und Multiplikation „zusammengesetzt“ aus den stetigen Funktionen $f(z) = z$ und der konstanten Funktion $f(z) = c$ und sind daher stetig.

Insbesondere sind die Potenzen, also $f(z) = c$, $f(z) = z$, $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3, \dots$ stetig.

(2) *Rationale Funktionen* sind die Funktionen $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P und Q Polynome sind. Es gilt $D(R) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

Rationale Funktionen sind ebenfalls stetig, da sie sich aus (stetigen) Polynomen durch Division ergeben. Die „kritischen“ Stellen, in denen der Nenner 0 wird, liegen nicht im Definitionsbereich, dort kann die Funktion also weder stetig noch unstetig sein, da es sie dort gar nicht gibt.

Insbesondere ist z.B. die Kehrwert-Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ stetig, das wissen wir aber ja bereits.

Viele der „üblichen“ Funktionen wie Polynome oder irrationale Funktionen sind also stetig. Ebenfalls stetig sind:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^z, \quad \ln z, \quad |z|$$

Außerdem gilt

2.7.5 Satz Seien f und g stetige Funktionen mit $W(g) \subset D(f)$. Dann ist auch die *verkettete* Funktion $f(g(z))$ stetig.

2.7.6 Beispiel $\cos \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $W\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\cos$ ist stetig mit $D(\cos) = \mathbb{R}$, also ist $\cos \frac{1}{x}$ stetig.

2.8 Umkehrfunktionen

2.8.1 Definition Sei f eine Funktion. Eine Funktion f^{-1} heißt *Umkehrfunktion*, wenn $f^{-1}(w) = z$ für $w = f(z)$.

f^{-1} darf nicht mit $\frac{1}{f(z)} = (f(z))^{-1}$ verwechselt werden. Man verwendet hier gleiche Bezeichnungen für unterschiedliche Dinge.

2.8.2 Satz (Eigenschaften) Für eine Funktion f und die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} gilt

- $D(f^{-1}) = W(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f(f^{-1}(w)) = w$
- $f^{-1}(f(z)) = z$

Der Graph der Umkehrfunktion entspricht für reelle Funktionen mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ der Spiegelung des ursprünglichen Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden.

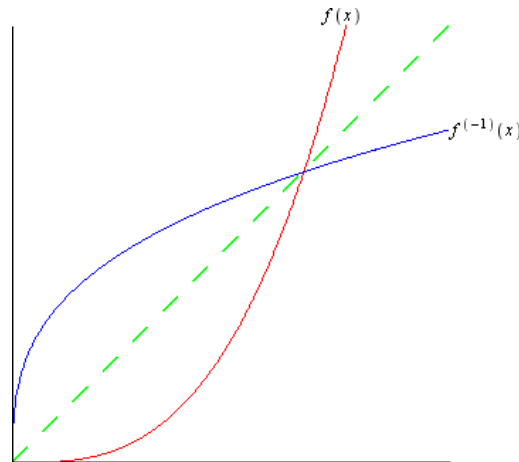


Abbildung 23: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

2.8.3 Beispiele (1) $f(z) = 2z$ mit $D(f) = \mathbb{C}$

Da $w = 2z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}w$, gilt $f^{-1}(w) = \frac{1}{2}w$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Der Kehrwert ist seine eigene Umkehrfunktion, also $f^{-1}(w) = \frac{1}{w}$, denn $w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$.

(3) $f(x) = x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$

Es gilt $f(2) = 4$, aber auch $f(-2) = 4$, derselbe Wert (hier 4) wird mehrfach angenommen. Es ist also unmöglich, x -Werte eindeutig y -Werten zuzuordnen. Daher können wir z.B. $f^{-1}(4)$ nicht berechnen, es könnte sowohl -2 als auch 2 sein.

Das letzte Beispiel zeigt, dass eine Umkehrfunktion nicht immer existiert. Um eine Umkehrfunktion zu haben, darf jeder y -Wert nur einmal angenommen werden.

Um wenigstens bei reellen Funktionen genau zu sagen, wann es eine Umkehrfunktion gibt, benötigen wir zuerst eine neue Definition (analog zur Monotonie von Folgen):

2.8.4 Definition f sei eine Funktion mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ und sei $x_1 < x_2$. f ist...

- *monoton wachsend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *monoton fallend*, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- *streng monoton wachsend*, wenn $f(x_1) < f(x_2)$,
- *streng monoton fallend*, wenn $f(x_1) > f(x_2)$,

Hiermit können wir ein Kriterium für die Existenz von Umkehrfunktionen angeben: