

Da $|q^n| \geq 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$ und deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{für } |q| < 1.$$

(c) $q = 0$:

In diesem Fall ist die Sache besonders einfach:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

(d) $|q| = 1$:

Für die Punkte mit $|q| = 1$ ist die Konvergenz von q^n nicht so eindeutig zu beantworten.

Für $q = 1$ ist beispielsweise $q^n = 1$ und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.

Für $q = -1$ ist andererseits $q^n = (-1)^n$, die Folge ist also divergent, genau wie z.B. (i^n) oder andere Folgen (q^n) mit $|q| = 1$.

1.10 Konvergenz- und Divergenzkriterien

1.10.1 Satz Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

1.10.2 Beispiele (1) $(2^n) = 1, 4, 8, 16, \dots$ ist unbeschränkt, also divergent.

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, \dots$ ist beschränkt (denn $|(-1)^n| \leq 1$), aber auch divergent.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt: beschränkte Folgen müssen nicht konvergieren. Wir können aber dennoch ein Kriterium für Konvergenz finden:

1.10.3 Satz (Monotonieprinzip) Ist eine reelle Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent. Genauer: Ist eine reelle Folge...

- ...monoton wachsend und nach oben beschränkt,...
- ...monoton fallend und nach unten beschränkt,...

... so konvergiert sie.

Schauen wir uns ein Beispiel an, bei dem wir auch gleich eine weitere Bezeichnung kennenlernen:

1.10.4 Definition Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die *Fakultät von n* definiert als

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{für } n \geq 1$$

und $0! = 1$.

1.10.5 Beispiel Sei $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$. Ist (a_n) monoton?

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{2}, \quad \text{da } n \geq 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ und (a_n) ist demnach monoton fallend.

Offenbar ist $a_n = \frac{2^n}{n!} \geq 0$, die Folge ist also nach unten beschränkt und nach dem Monotonieprinzip folgt:

$$\left(\frac{2^n}{n!}\right) \text{ konvergiert.}$$

Das Problem bei dieser Überlegung ist: wir wissen zwar, dass die Folge konvergiert, kennen aber den Grenzwert nicht.

Leider gibt es keine allgemeine Möglichkeit, den Grenzwert einer Folge zu berechnen. Dies muss bei jeder Folge neu überlegt werden. Den Grenzwert des letzten Beispiels könnte man wie folgt bestimmen:

Es gilt

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{2}{n} \cdot a_{n-1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\ &= 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.11 Die Eulersche Zahl

Untersuchen wir nun eine andere Folge auf Konvergenz:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Zur Prüfung der Monotonie betrachten wir $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ mit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} \\ &= \left(\frac{(n+1) \cdot (n-1)}{n \cdot n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

Benutzen wir die Bernoullische Ungleichung, Satz 1.5.3, mit $a = -\frac{1}{n^2} \geq -1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &\geq \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist $a_n \geq a_{n-1}$, die Folge (a_n) ist monoton wachsend.

Um zu zeigen, dass die Folge konvergiert, müssen wir nun nachrechnen, dass sie nach oben beschränkt ist. Dazu brauchen wir eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln:

1.11.1 Satz (Binomischer Satz) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

wobei die *Binomialkoeffizienten* n über k gegeben sind durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & , \text{ falls } k \geq 1 \\ 1 & , \text{ falls } k = 0 \end{cases}$$

1.11.2 Beispiele

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

Wenden wir den Binomischen Satz 1.11.1 auf unsere Folge a_n an:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \end{aligned} \tag{1}$$

und betrachten wir die Summanden genauer:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k! \underbrace{n^k}_{k \text{ Faktoren}}} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{2}$$

Für $k = 0$ gilt $\frac{1}{k!} = 1$ und für $1 \leq k \leq n$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k}}_{\substack{\leq \frac{1}{2} \quad \leq \frac{1}{2} \quad \leq \frac{1}{2} \\ k-1 \text{ Faktoren}}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Ausdrücke (1) und (2) ein, erhalten wir unter Verwendung des Satzes 1.6.3 über die geometrische Summe

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Es gilt also $a_n < 3$, die Folge ist nach oben beschränkt. Da sie ja auch monoton wachsend ist, folgt nach Satz 1.10.3, dass sie konvergiert.

Gegen welchen Grenzwert (a_n) konvergiert, ist damit nicht klar, das lässt sich auch gar nicht so leicht angeben. Setzen wir einige Zahlen ein, erhalten wir die Folge

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots \approx 2, 2.25, 2.370, 2.441, \dots$$

Tatsächlich können wir den Grenzwert nicht als Bruch darstellen (er ist ähnlich wie $\sqrt{2}$ oder die Zahl π irrational).

Dieser Grenzwert ist aber eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik:

1.11.3 Definition Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet.

Eine numerische Approximation für e kann man über die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ natürlich recht leicht ausrechnen (man muss nur ein großes n einsetzen), es ist $e \approx 2.71828$.

2 Funktionen

2.1 Funktionen und Graphen

2.1.1 Definition Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Wert z aus einem *Definitionsbereich* $D(f)$ genau einen Wert $f(z)$ zuordnet.

Der *Wertebereich* $W(f)$ von f ist die Menge aller Werte die f annimmt:

$$W(f) = \{w : w = f(z) \text{ für ein } z \in D(f)\}.$$

Im *Graph* einer Funktion werden die Werte x und $f(x)$ gegeneinander aufgetragen.

Ist $D(f) \subset \mathbb{C}$ und hat die Funktion komplexe Werte, ist dieser Graph vierdimensional — wir sind also nicht in der Lage, diesen Graph zu zeichnen! Liegt sowohl Definitions- als auch Wertebereich in $\mathbb{R}$, so hat der Graph zwei Dimensionen, in diesem Fall ist der Graph eine oft sehr nützliche Veranschaulichung der dargestellten Funktion.

2.1.2 Beispiele (1) $f(z) = z^2$

f kann für alle reellen oder komplexen Zahlen berechnet werden.

Definiert man f nur auf den reellen Zahlen, also $D(f) = \mathbb{R}$, nimmt f nur nicht-negative Werte an, dann gilt also $W(f) = [0, \infty[$.

Üblicherweise schreibt man $f(x)$ wenn f auf reellen und $f(z)$, wenn f auf komplexen Zahlen betrachtet wird. Grundsätzlich ist es aber natürlich egal, wie man diese Variable nennt.

Einige Funktionswerte in $\mathbb{R}$:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$f(x) =$	4	1	0	1	4

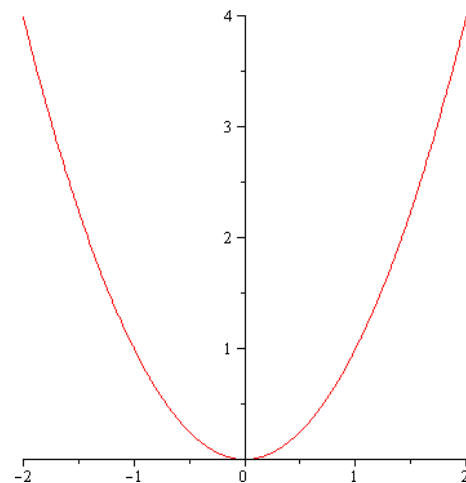


Abbildung 5: $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $D(f) = [-1, 1]$

Für $D(f) = [-1, 1]$ gilt $W(f) = [0, 1]$, für andere reelle Zahlen ist f nicht definiert.

$x =$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x) =$	-	0	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	1	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	0	-

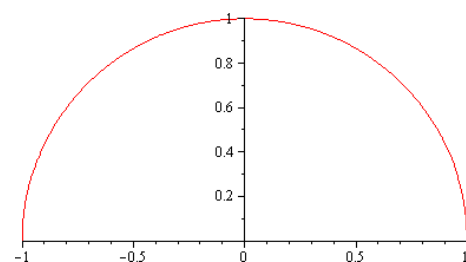


Abbildung 6: Der Graph von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1, 1]$ ist ein Halbkreis.

- (3) Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ oder $f(z) = |z|$ mit $D(f) = \mathbb{C}$.

Hier ist sowohl bei der reellen als auch bei der komplexen Betragsfunktion $W(f) = [0, \infty[$. Im Komplexen ist der Graph dreidimensional.

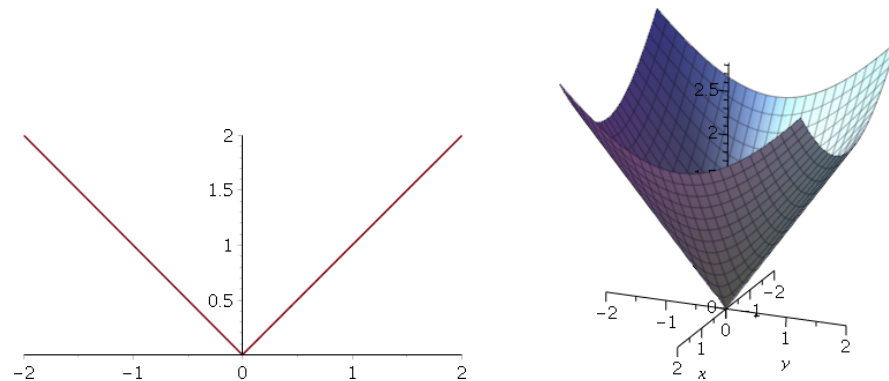


Abbildung 7: Die Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen.

2.2 Wichtige Funktionen

(1) Geraden:

Die allgemeine Darstellung einer Geraden ist die *Geradengleichung*

$$f(z) = az + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}.$$

$f(z)$ kann für alle komplexen oder reellen Zahlen berechnet werden.

Für reelle a, b und z ist die Interpretation der Werte a und b recht einfach: a ist die Steigung der Geraden, b die Verschiebung der Geraden nach oben oder unten.

Ein einfaches aber oft auftretendes Beispiel ist die *Identität* $f(z) = z$ oder die *konstante Funktion* $f(z) = c$.

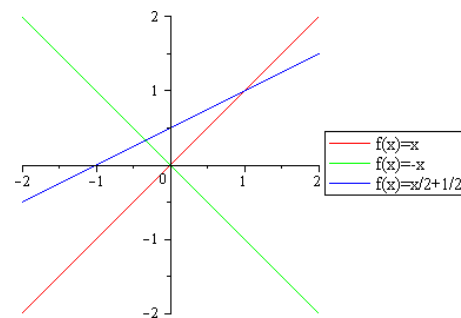


Abbildung 8: $f(x) = x, -x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

(2) Potenzen:

Potenzen sind zum Beispiel

$$f(z) = z^2, \quad f(z) = z^3, \quad f(z) = z^4, \quad \dots,$$

also die Funktionen

$$f(z) = z^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0.$$

f kann für alle komplexen oder reellen Zahlen berechnet werden.

Für $f(x) = x^n$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$W(f) = \begin{cases} [0, \infty[& \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ \mathbb{R} & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

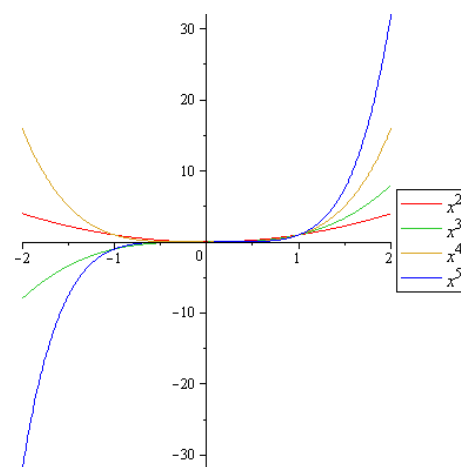
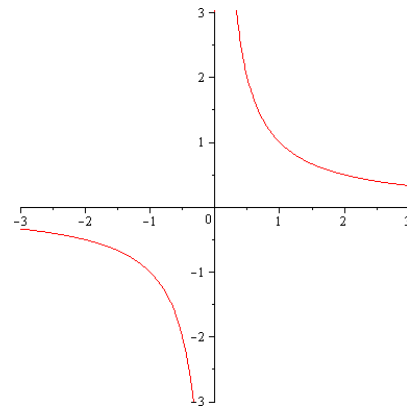


Abbildung 9: $f(x) = x^2, x^3, x^4, x^5$ ($x \in \mathbb{R}$)

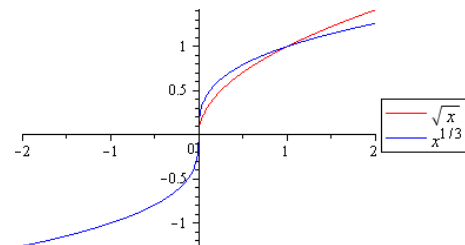
(3) Kehrwert:

$$f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

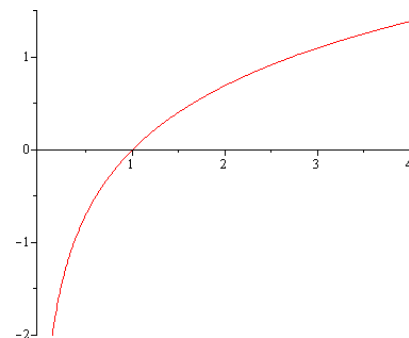
f kann für alle komplexen oder reellen Zahlen außer der Null berechnet werden und kann alle diese Werte, ebenfalls außer Null, annehmen.

Abbildung 10: $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$)**(4) Wurzeln (in $\mathbb{R}$):**

$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ kann, falls n ungerade ist, für alle reellen Zahlen definiert werden. Ist n gerade, kann f nur für nicht-negative Werte definiert werden.

Abbildung 11: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(5) Logarithmen (in $\mathbb{R}$):**

$f(x) = \log_b x$ kann für positive $x > 0$ berechnet werden. Für $D(f) =]0, \infty[$ nimmt f alle reellen Werte an: $W(f) = \mathbb{R}$.

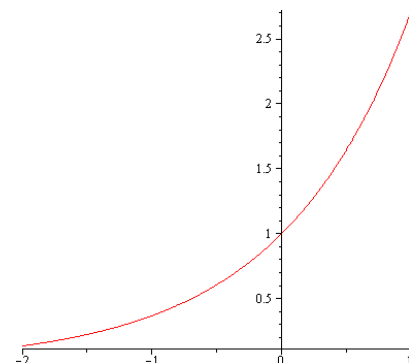
Abbildung 12: $f(x) = \log_e x$ **(6) Exponentialfunktion (in $\mathbb{R}$):**

Die *Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$f(x) = e^x,$$

wobei e die Eulersche Zahl (vgl. Def. 1.11.3) bezeichnet.

e^x ist für alle reellen Zahlen definiert, nimmt aber nur positive Werte an.

Abbildung 13: $f(x) = e^x$

Wie wir sehen werden, ist die Exponentialfunktion zur Basis der Eulerschen Zahl e eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik und der Naturwissenschaften. Entsprechend ist auch der Logarithmus zur Basis e besonders wichtig. Wir definieren deshalb eine abkürzende Schreibweise:

2.2.1 Definition Der *natürliche Logarithmus* ist der Logarithmus zur Basis e ,

$$\ln x = \log_e x .$$

2.2.2 Beispiel Exponentialfunktionen spielen vor allem bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen eine große Rolle.

Als Anfang 2020 das “Corona-Virus” SARS-CoV2 die Covid-19-Pandemie auslöste, stiegen überall auf der Welt die Fallzahlen dramatisch an. Der Begriff “exponentielles Wachstum” wurde auch von vielen nicht-wissenschaftlichen Medien verwendet. Tatsächlich beschreiben Exponentialfunktionen alle möglichen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wie die Vermehrung von Tieren oder Krankheitserregern, den Zerfall radioaktiver Isotope oder die Vermehrung von Geld auf einem Konto durch Zins- und Zinseszins.

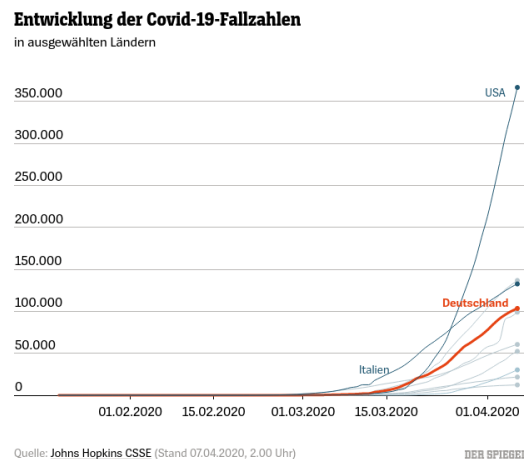


Abbildung 14: Covid-19-Infektionen bis 7.4.2020

In den Wochen nach den ersten Erkrankungen in Deutschland konnte sich der Erreger recht ungehemmt ausbreiten. Als dann die Schutzmaßnahmen griffen, wurde die Ausbreitung deutlich verlangsamt, ein exponentielles Wachstum fand in der Folge erst einmal nicht mehr statt.

Schauen wir uns daher die Situation zu Beginn der Ausbreitung in Deutschland an, z.B. die ersten drei Wochen im März 2020 (Abbildung 15). Die Funktion f soll die Anzahl der Infektionen im März beschreiben.

Da es an den Wochenenden regelmäßig Verzögerungen bei der Datenübermittlung durch die Gesundheitsämter gab, betrachten wir die Situation nicht am 1.3.2020 (ein Sonntag), sondern am ersten Mittwoch des Monats, dem 4.3.2020. Zu diesem Zeitpunkt gab es 262 bestätigte Fälle.

Genau zwei Wochen später, am 18.3.2020 wurden bereits 12 327 Fälle bestätigt:

$$f(4) = 262 , \quad f(18) = 12327 .$$

Wir beschreiben das Wachstumsverhalten durch einen *Exponentialansatz*:

$$f(t) = A \cdot e^{Bt}$$

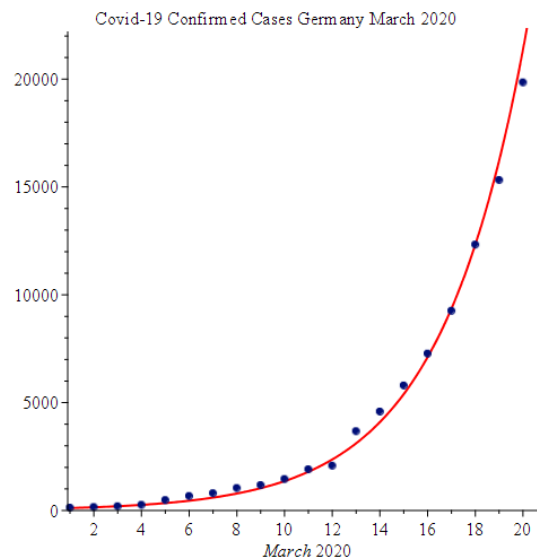


Abbildung 15: Blau: Infektionen mit SARS-CoV2 in Deutschland, 1.–21. März 2020, Rot: modellierte Exponentialfunktion

Wir haben also

$$\begin{aligned} f(4) = Ae^{4B} = 262 & \implies \frac{Ae^{4B}}{262} = 1 \\ f(18) = Ae^{18B} = 12327 & \implies \frac{Ae^{18B}}{12327} = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{Ae^{4B}}{262} = \frac{Ae^{18B}}{12327} & \iff \frac{12327}{262} = \frac{Ae^{18B}}{Ae^{4B}} = e^{14B} \\ & \iff 14B = \ln \frac{12327}{262} \\ & \iff B = \frac{1}{14} \ln \frac{12327}{262} \approx 0.275 \end{aligned}$$

Hieraus können wir A leicht berechnen: Aus Gleichung (3) folgt

$$A = \frac{262}{e^{4B}} \approx 87.182$$

Insgesamt ist daher (Abbildung 15)

$$f(t) \approx 87.182 e^{0.275 t}.$$

Bei solchen Wachstumsprozessen (analog bei Zerfallsprozessen) betrachtet man gerne die *Verdoppelungszeit* (bei Zerfallsprozessen die *Halbwertszeit*), in der sich die Probe verdoppelt (oder eben halbiert): Für welches t_D ist $f(t + t_D) = 2 \cdot f(t)$?

$$\begin{aligned} f(t + t_D) = 2 \cdot f(t) & \iff Ae^{B(t+t_D)} = 2Ae^{Bt} \\ & \iff e^{Bt_D} = 2 \\ & \iff Bt_D = \ln 2 \end{aligned}$$

Also ist

$$t_D = \frac{\ln 2}{B} \approx 2.52 ,$$

d.h., alle ca. $2\frac{1}{2}$ Tage verdoppelte sich zu diesem Zeitpunkt die Zahl der Infektionen.

(7) Trigonometrische Funktionen (in $\mathbb{R}$):

Trigonometrische Funktionen wie $\sin x$ und $\cos x$ stehen üblicherweise in Zusammenhang mit Winkeln.

Während im Alltag Winkel meistens in Grad angegeben werden, werden Winkel wissenschaftlich im *Bogenmaß* gemessen. Dabei wird der Winkel als die Länge des zugehörigen Kreisbogens eines Kreises mit Radius 1 angegeben.

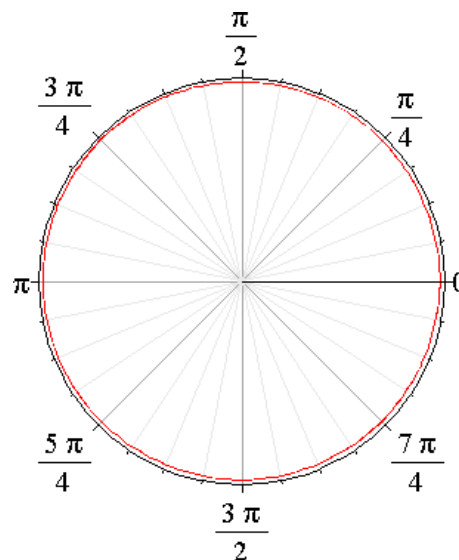


Abbildung 16: Winkel im Bogenmaß

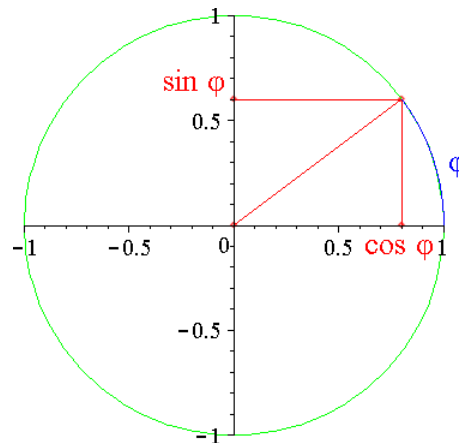
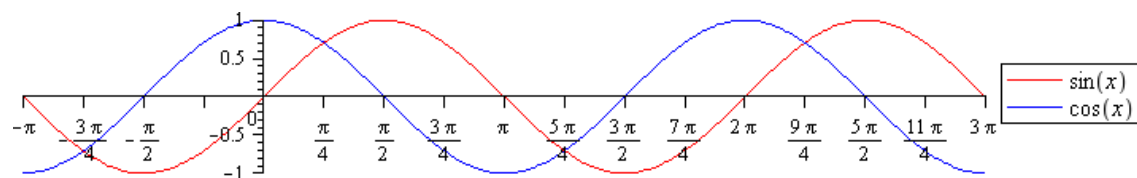
Da ein Kreis mit Radius 1 einen Umfang von 2π hat, entspricht dem Vollwinkel von 360° also der Winkel 2π .

0°	30°	45°	90°	180°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Die Sinus- und Cosinus-Funktionen sind anschaulich die Längen der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, das in einen Kreis mit Radius 1 eingeschrieben ist (Abbildung 17).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Die beiden Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ können für alle reellen Zahlen berechnet werden, nehmen aber nur Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ an.

Abbildung 17: Sinus und Cosinus eines Winkels φ Abbildung 18: $\sin x$ und $\cos x$ **2.2.3 Satz** (Rechenregeln)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \quad (4)$$

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x \quad (5)$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Die Gleichungen (4) und (5) besagen, dass sich die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ mit einer *Periode* der Länge 2π wiederholen. Sinus und Cosinus nennt man deshalb auch 2π -periodisch. Es genügt daher, die Funktionen im Intervall $[0, 2\pi]$ zu kennen.

Weitere trigonometrische Funktionen ergeben sich aus $\sin x$ und $\cos x$. Der *Tangens* ist die Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und der *Cotangens* ist

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

(jeweils definiert für Werte, bei denen die Nenner ungleich 0 sind).