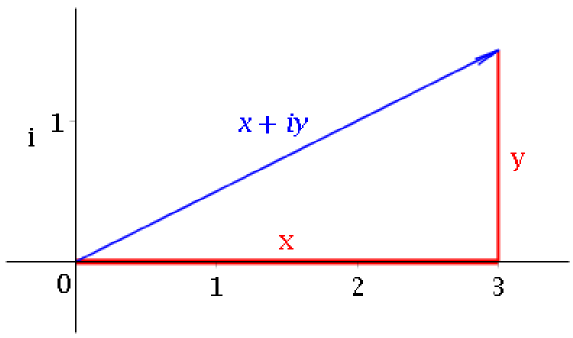

Abbildung 2: $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

Da reelle Zahlen den Imaginärteil Null haben, kann man für $x \in \mathbb{R}$ die obige Definition einfacher formulieren:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Leider ist diese Definition für reelle Zahlen oft unhandlich. Beispielsweise ist $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{x^2-4x+4}$ und mit solchen Wurzelausdrücken kann man eventuell nur schwer weiterrechnen.

Bei reellen Zahlen kann man den Betrag aber auch anders darstellen, was sich meist einfacher anwenden lässt:

1.7.3 Satz Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

Beim Rechnen mit Beträgen reeller Zahlen ist daher meist eine Fallunterscheidung erforderlich.

1.7.4 Beispiel Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-2| < 1$?

1. Fall $x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$
Hier ist $|x-2| = x-2$, also

$$|x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; x-2 < 1 \;\Leftrightarrow\; x < 3\,.$$

$|x-2| < 1$ gilt also für $x < 3$, falls $x \geq 2$ vorausgesetzt wird:

$$2 \leq x < 3$$

2. Fall $x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 2$
Hier ist $|x-2| = -x+2$, also

$$|x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; -x+2 < 1 \;\Leftrightarrow\; -x < -1 \;\Leftrightarrow\; x > 1$$

$|x-2| < 1$ gilt also für $x > 1$, falls $x < 2$ vorausgesetzt wird:

$$1 < x < 2$$

Insgesamt haben wir also $|x-2| < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3$.

Ganz allgemein gilt: Sei a eine reelle Zahl und $r > 0$. Dann ist für reelle x

$$|x-a| < r \;\Leftrightarrow\; a-r < x < a+r\,.$$

Natürlich können wir auch die Frage stellen, für welche *komplexen* Zahlen $z \in \mathbb{C}$ eine Ungleichung wie $|z-a| < r$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies lässt sich leicht anschaulich überlegen: $|z-a|$ ist der Abstand von z zu a, $|z-a| < r$ gilt also für alle z, deren Abstand von a kleiner als r ist — anders ausgedrückt: es handelt sich um die Zahlen, die in einem *Kreis* um a mit Radius r liegen (vgl. Abbildung 3).

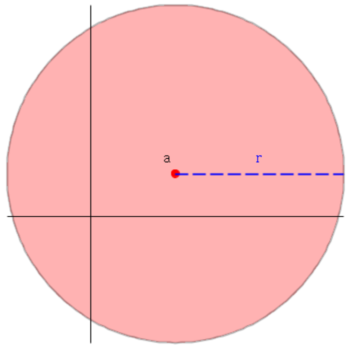

Abbildung 3: Die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < r$ bilden eine Kreisscheibe um a mit Radius r.

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt, wie man sich sehr leicht überlegt, $|x|^2 = x^2$. Für komplexe Zahlen sieht dies ein wenig anders aus:

Sei $z = x + iy$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 + i(xy - xy) - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 , \end{aligned}$$

also

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} .$$

1.8 Folgen

1.8.1 Definition Die Zahlen $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$, bei denen jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ eine reelle oder komplexe Zahl a_n zugeordnet wird, heißt *Folge*.

1.8.2 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist eine Folge mit $a_n = \dfrac{1}{n}$

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

(3) $(n + ni) = 1 + i, 2 + 2i, 3 + 3i, \ldots$

(4) (a_n) mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

heißt *Fibonacci-Folge*:

$$(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

1.8.3 Definition Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$|a_n| \leq C \qquad \text{für alle } n.$$

Eine reelle Folge heißt *nach oben (nach unten) beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$a_n \leq C \qquad (a_n \geq C) \qquad \text{für alle } n.$$

1.8.4 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist z.B. durch $C = 5$ (oder $C = 2$ oder $C = 1$) beschränkt.

(2) $((-1)^n)$ ist beschränkt, da $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n \leq 1$.

(3) $(n + ni)$ ist unbeschränkt.

(4) Die Fibonacci-Folge ist nach unten beschränkt.

(5) Die Fibonacci-Folge ist unbeschränkt. (Offensichtlich ist eine reelle Folge genau dann beschränkt, wenn sie nach oben *und* unten beschränkt ist.)

1.8.5 Definition Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt...

- ... *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n.
- ... *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n.
- ... *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n.
- ... *streng monoton fallend*, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle n.

1.8.6 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend:
Am leichtesten kann man die Monotonie oft überprüfen, wenn man den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ berechnet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} < a_n \ ,$$

(a_n) ist also streng monoton fallend.

(2) (2^n) ist streng monoton wachsend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} > a_n \ .$$

(3) Die Fibonacci-Folge ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend (da $a_0 = a_1 = 1$).

(4) $((-1)^n)$ ist nicht monoton.

1.9 Konvergenz

Betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Die Folgenglieder nähern sich immer weiter dem Wert 0. Diese „Konvergenz“ wollen wir nun exakter definieren.

Zuerst eine Vorbereitung:

1.9.1 Definition Sei $\varepsilon > 0$. Eine *reelle ε-Umgebung* eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} \ .$$

Eine *komplexe ε-Umgebung* von $a \in \mathbb{C}$ ist analog

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\} \ .$$

Wie wir auf Seite 8 gesehen haben, gilt im Reellen

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ ,$$

$U_\varepsilon(a)$ bezeichnet in $\mathbb{R}$ also ein Intervall.

Im Komplexen bezeichnet $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\}$ dagegen einen Kreis um a mit Radius ε.

„Konvergiert" nun eine Folge gegen einen Wert a (im Beispiel $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist $a = 0$) und betrachtet man eine ε-Umgebung um a (mit beliebigem $\varepsilon > 0$), so liegen alle Folgenglieder, eventuell bis auf die ersten, in dieser Umgebung — egal wie klein die Umgebung ist. Bei besonders kleinen Umgebungen werden i.a. mehr Folgenglieder außerhalb der Umgebung liegen, in jedem Fall ist deren Zahl aber endlich.

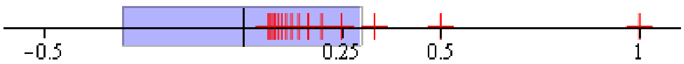

Abbildung 4: Die Folge $(\frac{1}{n})$ mit einer ε-Umgebung um 0: ab einer gewissen Zahl von Folgegliedern liegen alle innerhalb der Umgebung

Präzisieren wir dies:

1.9.2 Definition Eine Folge (a_n) heißt *konvergent gegen einen Grenzwert* a, wenn in jeder ε-Umgebung von a mit $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder a_n mit $n > n_0 \in \mathbb{N}$ liegen (also alle ab einer gewissen Stelle):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

1.9.3 Beispiel Betrachten wir wieder

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ .$$

Unsere Vermutung ist, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, also $a = 0$.

Sei z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Es gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \qquad \text{für } n > n_0 = 10.$$

Nur die ersten 10 Folgeglieder liegen also außerhalb von $U_\varepsilon(0)$.

Verkleinern wir die Umgebung und betrachten wir $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Dann gilt (s.o.)

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \qquad \text{für } n > n_0 = 100.$$

Ab dem 101sten Folgeglied liegen nun also alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(0)$.

Ganz analog haben wir für alle $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ .$$

1.9.4 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt

(1) $(a_n \pm b_n)$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(2) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(3) Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, dann konvergiert $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

1.9.5 Beispiele **(1)** $\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) = 2, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{16}, \ldots$

Es gilt $\frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2$, also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2\\ &= 0 + 0^2\\ &= 0\end{aligned}$$

(2) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots$

Da $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{1+0}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3) Betrachten wir die Folge (q^n) mit einem $q \in \mathbb{C}$.

Hier müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

(a) $|q| > 1$:

Ist $|q| > 1$, dann ist $|q| = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und mit der Bernoullischen Ungleichung 1.5.3 folgt

$$|q|^n = (1+d)^n \geq 1 + nd \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ .$$

Daraus folgt offenbar $|q|^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und somit auch

$$(q^n) \quad \text{divergiert} \quad \text{für } |q| > 1.$$

(b) $0 < |q| < 1$:

Ist $0 < |q| < 1$, dann folgt $\frac{1}{|q|} > 1$ und es ist $\frac{1}{|q|} = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir nun

$$|q^n| = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$